

# ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE, BAND 18, HEFT 5, NOVEMBER 1933

## *Experimentelle und theoretische Untersuchungen über Dehnungseigenschwingungen von Stäben und Rohren.<sup>1)</sup> II*

*Von E. Giebe und E. Blechschmidt*

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt)

(Mit 10 Figuren)

Inhalt: *Dehnungsschwingungen von rechteckigen Stäben*: § 12. Ableitung der Frequenzformel, drei Frequenzserien. — § 13. Diskussion der Frequenzformel, Grenzfrequenzen der drei Serien, Sonderfälle des Rechteckes, Quadrates, Würfels und der unendlichen Platte. — § 14. Meßergebnisse für Stäbe aus Nickel und Indilatana. — § 15. Schlußfolgerungen und einige Anwendungen auf piezoelektrische Resonatoren. — § 16. Zusammenfassung.

### **Dehnungsschwingungen von rechteckigen Stäben**

#### **§ 12. Ableitung der Frequenzformel. Drei Frequenzserien**

Mit den üblichen mathematischen Hilfsmitteln der allgemeinen Elastizitätstheorie ist das Problem von rechteckigen Stäben bisher überhaupt noch nicht behandelt. Da man bei Piezoquarzen oft rechteckige Stäbe benutzt, haben wir auch diese Stabform näher untersucht. In konsequenter Anwendung unserer Kopplungstheorie haben wir einen rechteckigen Stab entsprechend seinen drei Abmessungen, die wir mit  $x$ ,  $y$ ,  $z$  bezeichnen, als ein Gebilde aufzufassen, das aus drei miteinander gekoppelten Teilsystemen besteht. Die gesuchte Frequenzgleichung soll für beliebige Größen von  $x$ ,  $y$ ,  $z$  gelten, alle drei Richtungen sind von vornherein gleichberechtigt. Aus den Überlegungen in § 6 folgt somit, daß die ungestörten Eigenfrequenzen der drei Teilsysteme durch die Gleichungen

$$(45) \quad k f_x = \frac{k}{2x} \sqrt{\frac{E}{\varrho}}, \quad f_y = \frac{1}{2y} \sqrt{\frac{E}{\varrho}}, \quad f_z = \frac{1}{2z} \sqrt{\frac{E}{\varrho}}$$

1) Vorgetragen in der Sitzung der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin am 24. Februar 1933.

gegeben sind. In der Gleichung für  $f_x$  haben wir, wie früher, sogleich die Ordnungszahl  $k$  eingesetzt, indem wir als Länge  $x$  des Stabes diejenige Abmessung bezeichnen, die wesentlich größer als die Querschnittsabmessungen  $y, z$  ist. Die  $X$ -Richtung ist dann weiter, ebenso wie bei den Rohren, dadurch bevorzugt, daß in unserer Versuchsanordnung durch die Magnetostraktion primär periodische Änderungen der Stablänge erzeugt werden. Die Schwingungen in der  $X$ -Richtung nennen wir, wie früher, axiale Schwingungen, während  $f_y, f_z$  die Eigenfrequenzen der lateralen Schwingungen sind. Streng genommen müßten wir auch für diese beiden je eine harmonische Reihe von Eigenschwingungen ansetzen. Wir wollen uns jedoch darauf beschränken, den Einfluß der lateralen Grundschwingungen auf die harmonische Reihe der axialen Eigenfrequenzen zu betrachten. In Analogie zu den Rohren und Zylindern werden wir auch bei rechteckigen Stäben von vornherein annehmen müssen, daß die Kopplungen zwischen den drei Systemen nur durch die kinetische Energie erfolgen. Es kommen also drei Kopplungskoeffizienten  $q_{12}, q_{13}, q_{23}$  in Betracht, die aber aus Symmetriegründen alle dieselbe Größe  $q$  haben müssen. Entsprechend wie bei den Rohren wird  $q$  vermutlich der Poissonschen Konstanten gleichzusetzen sein. Wir nehmen hier das Resultat der Messungen voraus, das diese Vermutung bestätigt, und setzen von vornherein  $q = \mu$ .

Die für drei gekoppelte Schwingungen gültige Frequenzgleichung haben wir in § 4 Gl. (10) schon hingeschrieben. In diese haben wir nach vorstehendem einzusetzen

$$(46) \quad kf_x = \sqrt{\frac{b_{11}}{a_{11}}}, \quad f_y = \sqrt{\frac{b_{22}}{a_{22}}}, \quad f_z = \sqrt{\frac{b_{33}}{a_{33}}},$$

$$(47) \quad p_{xy} = \frac{b_{12}}{\sqrt{b_{11} b_{22}}} = 0, \quad \text{entsprechend} \quad p_{xz} = 0, \quad p_{yz} = 0,$$

$$(48) \quad q_{xy} = \pm \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11} a_{22}}}, \quad q_{xz} = \pm \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11} a_{33}}}, \quad q_{yz} = \pm \frac{a_{23}}{\sqrt{a_{22} a_{33}}},$$

$$(49) \quad q_{xy}^2 = q_{xz}^2 = q_{yz}^2 = q^2 = \mu^2.$$

Hiermit ergibt sich nach Auflösung der Determinante (10)

$$(50) \quad \begin{cases} (k^2 f_x^2 - F^2)(f_y^2 - F^2)(f_z^2 - F^2) \\ \quad = \mu^2 F^4 (k^2 f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 - 3F^2) - 2\mu^3 F^6. \end{cases}$$

Setzt man die Quadratwurzeln in (48) sämtlich mit positiven Vorzeichen ein, so wird das Vorzeichen des letzten Gliedes auf

der rechten Seite von (50) positiv, es muß aber nach dem Ergebnis der Messungen (vgl. Fig. 10) unbedingt negativ sein, so wie es hingeschrieben ist. Demnach sind entweder alle drei Koeffizienten  $q$  oder einer derselben gleich  $-\mu$  zu setzen. Da die axiale Schwingung als die angeregte bevorzugt ist, würde auch  $+\mu$  für  $q_{xy}$  und  $q_{xz}$  und  $-\mu$  für  $q_{yz}$  aus physikalischen Gründen möglich erscheinen. Beim zweidimensionalen Rohr spielt die Frage des Vorzeichens des Kopplungskoeffizienten keine Rolle, weil nur  $q^2$  und nicht, wie hier,  $q^3$  vorkommt.

Aus (50) ergibt sich die folgende kubische Gleichung für  $F^2$ :

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} & F^6 - F^4 \frac{(k^2 f_x^2 + f_y^2 + f_z^2)(1-\mu)}{(1-2\mu)(1+\mu)} \\ & + F^2 \frac{k^2 f_x^2 f_y^2 + k^2 f_x^2 f_z^2 + f_y^2 f_z^2}{(1-2\mu)(1+\mu)^2} - \frac{k^2 f_x^2 f_y^2 f_z^2}{(1-2\mu)(1+\mu)^3} = 0 \end{aligned} \right.$$

und durch die Substitution  $F^2 = \eta + \frac{\alpha}{3}$

$$(52) \quad \eta^3 - 3\eta \left[ \frac{\alpha^2 - 3\beta}{9} \right] - 2 \left[ \frac{27\gamma - 9\alpha\beta + 2\alpha^3}{54} \right] = 0$$

oder

$$\eta^3 - 3P\eta - 2Q = 0,$$

wobei für die Zahlenwerte der Koeffizienten  $P$  und  $Q$  die Beziehung  $Q^2 + P^3 < 0$  gilt. Setzt man  $\cos \varphi = \frac{Q}{P\sqrt{P}}$ , so sind die drei Wurzeln

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} F_{I, II} &= \sqrt{-2\sqrt{P} \cos\left(\frac{\varphi}{3} \mp 60^\circ\right) + \frac{\alpha}{3}}, \\ F_{III} &= \sqrt{2\sqrt{P} \cos\frac{\varphi}{3} + \frac{\alpha}{3}}. \end{aligned} \right.$$

Man erhält also für jede Ordnung  $k$  drei Frequenzen, d. h. drei Serien von Eigenfrequenzen, die wir mit Serie I, II, III bezeichnen. Zwischen den drei Wurzeln (53) bestehen folgende einfache Beziehungen, die den Gl. (17) und (19) beim Rohr entsprechen:

$$(54) \quad F_I^2 \cdot F_{II}^2 \cdot F_{III}^2 = \frac{k^2 f_x^2 f_y^2 f_z^2}{(1-2\mu)(1+\mu)^3},$$

$$(55) \quad \frac{1}{F_I^2} + \frac{1}{F_{II}^2} + \frac{1}{F_{III}^2} = \frac{1}{k^2 f_x^2} + \frac{1}{f_y^2} + \frac{1}{f_z^2}.$$

§ 13. Diskussion der Frequenzformel.  
Grenzfrequenzen der drei Serien. Sonderfälle des Rechteckes,  
Quadrates, Würfels und der unendlichen Platte

Die Gl. (50) ergibt einfache Lösungen für folgende Grenzfälle:

a) Für sehr kleinen Querschnitt  $y \approx 0$ ,  $z \approx 0$ , also  $f_y = f_z \approx \infty$  wird

$$(56) \quad F_1 = k f_x.$$

Man hat die harmonische Reihe reiner Axialschwingungen eines sehr dünnen Stabes.

b) Für  $x \approx 0$ , d. h.  $f_x \approx \infty$ , also für einen äußerst kurzen Stab, erhält man aus (50)

$$(57) \quad (f_y^2 - F^2)(f_z^2 - F^2) = \mu^2 F^4,$$

also eine Gleichung von derselben Form wie bei Rohren. Die beiden Wurzeln

$$(58) \quad F_{I, II}(\max) = \sqrt{\frac{f_y^2 + f_z^2 \mp V(f_y^2 - f_z^2)^2 + 4\mu^2 f_y^2 f_z^2}{2(1 - \mu^2)}}$$

ergeben als obere Grenzfrequenzen der Serien I und II die Eigenfrequenzen der Dehnungsschwingungen einer sehr dünnen rechteckigen Platte. Diese Grenzwerte für  $\frac{x}{k} \approx 0$  der rein lateralen Stabschwingungen werden in Wirklichkeit nicht völlig erreicht. Für quadratischen Stabquerschnitt ist  $f_y = f_z$  und man erhält als obere Grenze von Serie I bzw. II der Stabschwingungen

$$(59) \quad \begin{cases} F_I(\max) = \frac{f_y}{\sqrt{1 + \mu}} = \frac{1}{2s} \sqrt{\frac{E}{\varrho(1 + \mu)}}, \\ F_{II}(\max) = \frac{f_y}{\sqrt{1 - \mu}} = \frac{1}{2s} \sqrt{\frac{E}{\varrho(1 - \mu)}}. \end{cases}$$

Dies sind die Eigenfrequenzen einer dünnen quadratischen Platte von der Seitenlänge  $s$ .

c) Für  $x = \infty$ , also bei einem unendlich langen Stab, können sich stehende Axialschwingungen nicht ausbilden.  $f_x$  wird gleich 0, damit entsteht aus (50) die folgende quadratische Gleichung für  $F^2$

$$(60) \quad F^4 - \frac{(f_y^2 + f_z^2)(1 - \mu^2)F^2 + f_y^2 f_z^2}{(1 + \mu)^2(1 - 2\mu)} = 0$$

mit den Wurzeln

$$(61) \quad F_{II, III}(\min) = \sqrt{\frac{(f_y^2 + f_z^2)(1 - \mu) \mp V(f_y^2 - f_z^2)^2(1 - 2\mu) + \mu^2(f_y^2 + f_z^2)^2}{2(1 + \mu)(1 - 2\mu)}}.$$



Diese beiden Frequenzen sind die Eigenfrequenzen der rein lateralen Schwingungen eines unendlich langen rechteckigen Stabes, wir haben sie mit  $F_{II}(\min)$  bzw.  $F_{III}(\min)$  bezeichnet, weil sie zugleich die unteren Grenzfrequenzen der Serien II und III sind. Für quadratischen Stabquerschnitt ( $f_y = f_z$ ) wird

$$(62) \quad F_{II}(\min) = \frac{f_y}{\sqrt{1+\mu}}, \quad F_{III}(\min) = \frac{f_y}{\sqrt{(1+\mu)(1-2\mu)}}.$$

Dies sind die Eigenfrequenzen eines unendlich langen quadratischen Stabes.

Die bei rechteckigen Stäben vorhandenen drei Serien von Eigenfrequenzen sind durch zwei tote Zonen von der in § 6 bereits gekennzeichneten Bedeutung getrennt. Diese Zonen erstrecken sich über die Frequenzbereiche  $F_I(\max)$  bis  $F_{II}(\min)$  bzw.  $F_{II}(\max)$  bis  $F_{III}(\min)$ . Bei quadratischem Querschnitt fällt nach (59) und (62) die obere Grenze der Serie I mit der unteren von II zusammen. Zwischen diesen beiden Serien ist also in diesem Falle keine tote Zone vorhanden.

d) Für einen sehr dünnen Streifen ( $z \approx 0$ ,  $f_z \approx \infty$ ) der Breite  $y$  und der Länge  $x$  ergeben sich aus (50) die Eigenfrequenzen aus der Gleichung

$$(63) \quad (k^2 f_x^2 - F^2)(f_y^2 - F^2) = \mu^2 F^4,$$

also zwei Frequenzserien, die denen des dünnen Rohres entsprechen, nur daß an Stelle von  $f_x$  hier  $f_y$  tritt. Die höchsten Eigenfrequenzen der Serie II des Streifens gehorchen, wie beim Rohr, dem Gesetz (22)  $F = \frac{k f_z}{\sqrt{1-\mu^2}}$ , das also auch gilt

bei einem sehr dünnen ( $z = 0$ ), unendlich langen ( $y = \infty$ ,  $f_y = 0$ ) Band für die Schwingungen in Richtung der dritten endlichen Dimension.

e) Läßt man beide Querdimensionen  $y$  und  $z$  unendlich groß werden ( $f_y = f_z = 0$ ), so entsteht eine unendlich ausgedehnte planparallele Platte. Für ihre Eigenschwingungen folgt aus (50)

$$(64) \quad F = k f_x \sqrt{\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}};$$

sie pflanzen sich in Richtung der Plattendicke mit der Geschwindigkeit

$$(65) \quad v = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}} = \sqrt{\frac{E}{\rho \left(1 - \frac{2\mu^2}{1-\mu}\right)}}$$

fort. Ist der Stabquerschnitt endlich, so gehorchen die Eigenfrequenzen der Serie III bei hohen Ordnungen  $k$  mit steigen-

dem  $k$  immer näher dem Gesetz (64), sie sind dann also sehr nahe harmonisch, ebenso wie die niedrigsten Eigenfrequenzen der Serie I, haben aber nach (65) eine höhere Fortpflanzungsgeschwindigkeit als diese, für die  $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  ist.

Unsere Formel führt auf den bekannten Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Dilatationswellen in einem unbegrenzten Medium, der sonst auf ganz andere Weise abgeleitet wird.<sup>1)</sup> Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v$  (65) der „Dickenschwingungen“ einer sehr großen Platte von kleiner Dicke, muß merklich unabhängig von der rechteckigen oder kreisförmigen Umrandung der Platte sein. Wir haben in § 10 bereits darauf hingewiesen, daß die aus der Zylindertheorie folgende Formel (40) mit (65) nahezu identisch ist.

f) Für einen quadratischen Stab  $y = z$ , ( $f_y = f_z$ ), erhält man aus (50) nach einigen Umformungen

$$(66) \quad \left[ \frac{f_y^2 - F^2}{\mu F^2} - 1 \right] \left[ \frac{k^2 f_z^2 - F^2}{\mu F^2} \left( \frac{f_y^2 - F^2}{\mu F^2} + 1 \right) - 2 \right] = 0.$$

Die erste Klammer ergibt als Wurzel

$$(67) \quad F = \frac{f_y}{\sqrt{1 + \mu}},$$

die mit der einen Wurzel von (59) und von (62) übereinstimmt, die zweite Klammer führt auf die quadratische Gleichung

$$(68) \quad F^4 - \frac{F^2 \left( k^2 f_z^2 + \frac{f_y^2}{1 - \mu} \right) + \frac{k^2 f_z^2 f_y^2}{1 - \mu}}{1 - \frac{2\mu^2}{1 - \mu}} = 0.$$

Im Spezialfall des quadratischen Querschnittes treten also nicht drei, sondern nur zwei Serien von Eigenfrequenzen auf, ebenso wie beim Rohr: Der quadratische Stab verhält sich also wie ein System von zwei Freiheitsgraden (für jede Ordnung  $k$ ), die „ungestörten“ Eigenfrequenzen der beiden miteinander gekoppelten Teilsysteme sind, wie eine Vergleichung von (68) mit der für das Rohr gültigen Gleichung (15) lehrt,  $k f_x$  sowie  $f_y / \sqrt{1 - \mu}$ , d. i. nach (59) die höhere der beiden Eigenfrequenzen einer quadratischen Platte. Der Kopplungskoeffizient ist

$$(69) \quad q = \mu \sqrt{\frac{2}{1 - \mu}},$$

1) Vgl. z. B. Love-Timpe, a. a. O. S. 340; ferner O. D. Chwolson, *Lehrb. d. Phys.* 1. S. 716–718. 1902.

der auch in die oben diskutierte Gleichung (65) eingeht. Die Grenzfrequenzen der beiden Frequenzserien eines quadratischen Stabes beiderseits der toten Zone sind also  $F_1(\max) = \frac{f_v}{\sqrt{1-\mu}}$  und

$$F_{II}(\min) = \frac{f_v}{\sqrt{1-\mu} \cdot \sqrt{1-q^2}} = \frac{f_v}{\sqrt{(1+\mu)(1-2\mu)}}$$

[vgl. Gl. (62), wo für  $F_{II}(\min)$  infolge der Ableitung aus (60)  $F_{III}(\min)$  geschrieben ist]. Die Wurzeln von (68) sind

$$(70) F_{I,II} = \sqrt{\frac{k^2 f_z^2 (1-\mu) + f_v^2 \mp \sqrt{(k^2 f_z^2 (1-\mu) - f_v^2)^2 + 8\mu^2 k^2 f_z^2 f_v^2}}{2(1+\mu)(1-2\mu)}}$$

und für den Fall der Resonanz  $k f_z = \frac{f_v}{\sqrt{1-\mu}} = f$

$$(70a) \quad F_{I,II} = \frac{f}{\sqrt{1 \pm \sqrt{\frac{2\mu^2}{1-\mu}}}}.$$

Ein Vergleich von (69) mit (38) und (42) lehrt, daß die Kopp-  
lungskoeffizienten für quadratischen und für kreisförmigen  
Querschnitt sehr nahe gleich groß sind.

g) Wählt man die Abmessungen eines rechteckigen Stabes  
so, daß die eine der Querschnittsseiten, etwa  $y$ , ein ganzzahliger  
Bruchteil  $1/k$  der Länge ist, so ist die axiale Oberschwin-  
gung  $k f_z$  in Resonanz mit der lateralen Schwingung  $f_v$ . Setzt  
man in (50)  $k f_z = f_v$ , so erhält man dieselbe Gleichung wie  
(66), nur daß an Stelle von  $k^2 f_z^2$  jetzt  $f_v^2$  tritt; entsprechend  
lauten die beiden Wurzeln (70), während die 3. Wurzel den  
gleichen Wert wie (67) hat. Hieraus ergibt sich der folgende  
für die experimentelle Prüfung der Theorie wichtige Satz: Bei  
rechteckigen Stäben, deren eine Querschnittsseite  $y$  ein ganz-  
zähliges Vielfaches  $k$  ihrer Länge  $x$  ist, hat im Falle der  
Resonanz  $k f_z = f_v$  die eine der Eigenfrequenzen stets den  
gleichen Wert  $F(\text{Res.}) = \frac{f_v}{\sqrt{1+\mu}}$ , welches auch die Größe der

zweiten Querschnittsseite  $z$  sein mag. Das Entsprechende gilt  
auch für die andere Seite ( $z$ ), gleichgültig ob  $z$  größer oder  
kleiner als  $y$  ist. Man kann diesen Satz auch folgendermaßen  
ausdrücken: Ist eine axiale Oberschwingung  $k f_z$  eines recht-  
eckigen Stabes in Resonanz mit einer lateralen Schwingung,  
so hat die Harmonieabweichung  $\delta = \frac{k f_z}{F(\text{Res.})} - 1$  für be-  
liebige Stababmessungen immer den gleichen Wert  $\sqrt{1+\mu}$ .  
Da die Vorgänge längs einer elastischen Halbwelle immer die

gleichen sind, unabhängig von der Stablänge  $x$  und der Ordnungszahl  $k$ , so gilt dieser Satz auch für  $k = 1$ , also  $x = y$ , d. h. für eine quadratische Platte, also für  $x = y = s$  (und auch für  $x = y = z = s$ ), deren eine Eigenfrequenz demnach unabhängig von ihrer Dicke, also auch beim Würfel, stets  $f_s / \sqrt{1 + \mu}$  ist. Die anderen beiden Eigenfrequenzen der Platte findet man aus Gl. (70), wenn man in dieser  $k^2 f_x^2$  durch  $f_x^2$  ersetzt. Ist die Platte sehr dünn ( $z = 0$ ), so hat sie nur zwei Eigenfrequenzen, die in (59) bereits angegeben sind.

h) Ist  $x = y = z = s$ , so wird aus dem Stab ein Würfel. Setzt man in (50)  $k = 1$  und  $f_x = f_y = f_z = f$ , so erhält man

$$(71) \quad \left( \frac{f^2 - F^2}{\mu F^2} \right)^3 - 3 \left( \frac{f^2 - F^2}{\mu F^2} \right) + 2 = 0$$

oder nach einigen Umformungen

$$(72) \quad \left[ \frac{f^2 - F^2}{\mu F^2} - 1 \right] \left[ \left( \frac{f^2 - F^2}{\mu F^2} \right)^2 + \frac{f^2 - F^2}{\mu F^2} - 2 \right] = 0$$

und hieraus die drei Wurzeln

$$(73) \quad F_I = F_{II} = \frac{f}{\sqrt{1 + \mu}}, \quad F_{III} = \frac{f}{\sqrt{1 - 2\mu}}.$$

Ein Würfel von der Kantenlänge  $s$  hat also zwei Eigenfrequenzen

$$(74) \quad F' = \frac{1}{2s} \sqrt{\frac{E}{\varrho(1 + \mu)}} \quad \text{und} \quad F'' = \frac{1}{2s} \sqrt{\frac{E}{\varrho(1 - 2\mu)}}.$$

Einen Würfel der Kantenlänge  $s$  kann man hiernach als aus zwei gekoppelten, resonierenden Systemen bestehend auffassen.

Die ungestörte Eigenfrequenz des einen Systems ist  $f = \frac{1}{2s} \sqrt{\frac{E}{\varrho}}$ , d. i. die Eigenfrequenz eines sehr dünnen Stabes der Länge  $s$ , diejenige des anderen

$$\frac{f}{\sqrt{1 - \mu}} = \frac{1}{2s} \sqrt{\frac{E}{\varrho(1 - \mu)}},$$

d. i. nach (59) die eine Eigenfrequenz einer sehr dünnen quadratischen Platte der Seite  $s$ ; der Kopplungskoeffizient ist

$$q = \mu \sqrt{\frac{2}{1 - \mu}}.$$

Hinsichtlich der in den vorstehenden Formeln (51) bis (74) häufig vorkommenden Ausdrücke  $1 + \mu$  und  $1 - 2\mu$  sei an die folgenden in der Elastizitätstheorie bekannten Beziehungen zwischen den Moduln der Dehnung  $E$ , der Torsion  $T$  und der Volumenelastizität  $M$  erinnert:

$$(75) \quad \frac{E}{1 + \mu} = 2T, \quad \frac{E}{1 - 2\mu} = 3M.$$

Nach (59) und (73) kann man demnach durch Messung der einen Eigenfrequenz einer dünnen quadratischen Platte unmittelbar den Torsionsmodul und durch Messung der beiden Eigenfrequenzen eines Würfels unmittelbar den Modul der Torsion und der Volumenelastizität bestimmen.

In vielen praktischen Fällen, z. B. bei der Bestimmung des  $E$ -Moduls aus axialen Dehnungsschwingungen braucht man nur für niedrige Ordnungen der Serie I die Harmonieabweichungen zu kennen. Für die Berechnung der in solchen Fällen nur kleinen Korrektur kann man ähnlich wie bei Rohren und Zylindern eine Näherungsformel benutzen. Man schreibt Gl. (50) in der Form:

$$(76) \quad \frac{k^2 f_z^2}{F^2} - 1 = \mu^2 \frac{\frac{F^2}{f_y^2 - F^2} + \frac{F^2}{f_z^2 - F^2} - \frac{2\mu F^4}{(f_y^2 - F^2)(f_z^2 - F^2)}}{1 - \frac{\mu^2 F^4}{(f_y^2 - F^2)(f_z^2 - F^2)}}$$

und setzt auf der rechten Seite für  $F$  den Näherungswert  $k f_z$  und dementsprechend für die Frequenzverhältnisse  $f_y/F$  und  $f_z/F$  die Verhältnisse der elastischen Wellenlängen  $x/k y$  bzw.  $x/k z$ . In dem Bereich, in dem die Näherung  $k f_z = F$  zulässig ist, kann man im Nenner von (76) das Glied mit  $\mu^2$  neben 1 vernachlässigen. Dann erhält man die Näherungsformel

$$(77) \quad \frac{k^2 f_z^2}{F^2} = 1 + \mu^2 \frac{\frac{k^2 (y^2 + z^2)}{x^2} - \frac{2 k^4 y^2 z^2 (1 + \mu)}{x^4}}{\left(1 - \frac{k^2 y^2}{x^2}\right) \left(1 - \frac{k^2 z^2}{x^2}\right)},$$

die erheblich anders wie die Rayleighsche Formel (3) aussieht. Für quadratischen Querschnitt  $y = z = s$ ,  $f_y = f_z = f$  wird aus Gl. (76) die folgende:

$$(78) \quad \frac{k^2 f_z^2}{F^2} - 1 = \frac{2\mu^2}{\left(\frac{f}{F}\right)^2 - 1 + \mu}$$

und mit der gleichen Annäherung wie oben:

$$(79) \quad \frac{k^2 f_z^2}{F^2} - 1 = \frac{2\mu^2}{\frac{x^2}{k^2 s^2} - 1 + \mu}.$$

Diese Näherungsformeln kann man bis zu ziemlich kurzen Stablängen bzw. elastischen Wellenlängen benutzen; bei quadratischem Querschnitt, d. h. im ungünstigsten Falle, ergibt Formel (79) noch bei einem Verhältnis  $x/ks = 2$ , also für einen Nickelstab ( $\mu = 0,29$ ), dessen Länge doppelt so groß ist wie die Querschnittsseite, das Verhältnis  $k f_z/F$  bis auf 0,0014 bei einem Gesamtwert von 1,025, also bis auf rund 1‰

richtig. Ist  $z \ll y$ , z. B.  $y = 5z$ , so benutzt man die Näherungsformel:

$$(80) \quad \frac{k^2 f_z^2}{F_1^2} - 1 = \frac{\mu^2}{k^2 y^2 - 1}.$$

Zu den Formeln (76) und (78) sei noch folgendes bemerkt: Wenn man bei der Ableitung der Frequenzgleichung (50), also in der Determinante (10) nur die Kopplungen zwischen der axialen und den beiden lateralen Schwingungen in Ansatz bringt, dagegen eine Kopplung zwischen den beiden letzteren, die erst sekundär durch Kopplungen mit der angeregten  $x$ -Schwingung entstehen, außer Betracht läßt, so verschwindet auf der rechten Seite von (76) im Zähler und im Nenner das letzte Glied, das  $2\mu$  bzw.  $\mu^2$  enthält. Entsprechend fällt in (78)  $\mu$  neben  $-1$  fort. Die beiden Formeln (76) und (78) lassen also deutlich den zusätzlichen Einfluß der Kopplung zwischen den lateralen Schwingungen erkennen.

#### § 14. Meßergebnisse für Stäbe aus Nickel und Indilatans

Die Spektren der Eigenfrequenzen wurden für acht Stäbe aus technisch reinem Nickel und fünf Stäbe aus Indilatans aufgenommen. Sämtliche Stäbe waren 100 mm lang. Bei sieben Nickelstäben, die aus einem Zylinder von 20 mm Durchmesser herausgeschnitten wurden, war die Abmessung der größeren Querschnittsseite die gleiche, 10 mm, während die kleinere Seite 10, 9,3, 8,5, 7, 5, 3, 1,5 mm betrug. Bei einem Nickelstab war der Querschnitt  $8 \times 6$  mm. In ähnlicher Weise wurden die Abmessungen der Indilatansstäbe variiert. Die genauen Maßzahlen für alle Stäbe sind in Tab. 10, Spalten 3—5 angegeben. Aus den beobachteten Grundfrequenzen (Spalte 6) und der Länge  $x$  kann man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v$  (Spalte 10) und Modul  $E$  (Spalte 11) berechnen. Dabei ist, wie bei Rohren und Zylindern zu berücksichtigen: 1. Bei den gewählten Stababmessungen hat schon die tiefste Eigenfrequenz  $F_1$  eine kleine Harmonieabweichung  $\delta_1$  (Spalte 9), die sich aus der Näherungsformel (77), wenigstens sofern unsere Theorie richtig ist, leicht berechnen läßt. 2. Inhomogenität des Materials macht eine kleine Korrektur  $\epsilon$  (Spalte 8) nötig, die sich in ähnlicher Weise, wie bereits oben beschrieben, bestimmen läßt. Bei einigen Stäben ergibt sich  $\epsilon$  nahe gleich  $\delta_1$ , bei anderen trifft dies auch nicht dem Vorzeichen nach zu. Jedoch überschreitet die Inhomogenitätskorrektur  $\epsilon$  nur in einem Falle (3‰) den Durchschnittswert von  $1-2\%$ . Mit  $\epsilon$  ergeben sich aus den  $F_1$  die ungestörten Grundfrequenzen  $f_z$ .

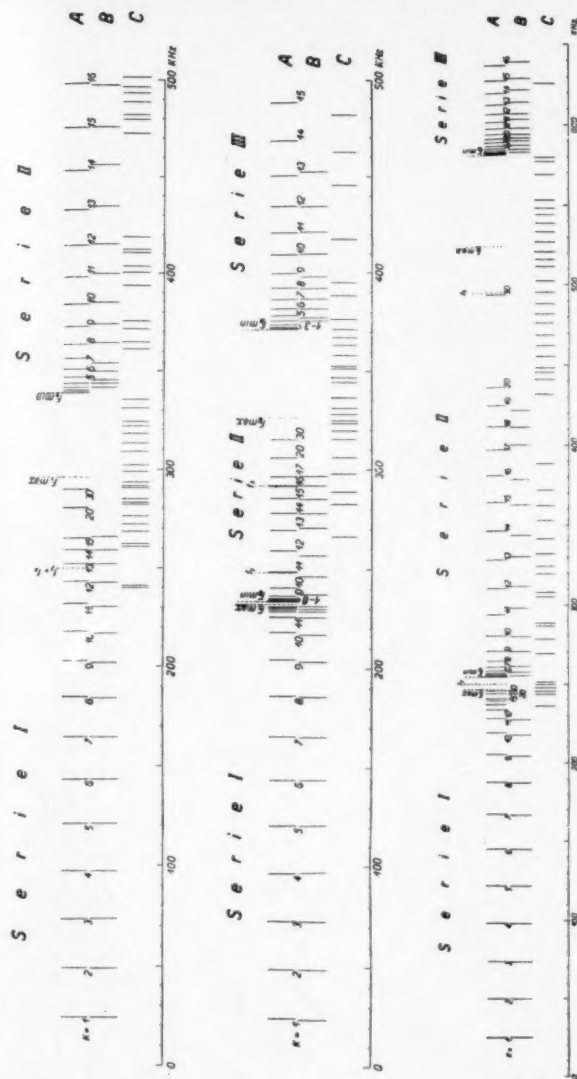


Fig. 9. Frequenzspektren von rechteckigen Nickelstäben. A berechnet, B und C beobachtet  
[oben  $100 \times 10 \times 10$  (quadratischer Stab), Mitte  $100 \times 10 \times 8,5$ , unten  $100 \times 10 \times 5$  mm]



Ta-  
bel  
Meßergebnisse

1	2	3	4	5	6	7
Nr.	Material	Abmessungen			$F_1$ in kHz	$f_z$ in kHz
		$x$ in mm	$y$ in mm	$z$ in mm		
1	Nickel	100,1	9,94	9,94	24,77	24,79
2	"	100,0	9,99	9,29	24,84	24,84
3	"	100,3	9,99	8,50	24,72	24,73
4	"	100,1	9,99	6,88	24,81	24,76
5	"	100,1	9,93	5,01	24,75	24,80
6	"	100,2	9,98	2,99	24,74	24,75
7	"	100,2	10,00	1,50	24,71	24,76
8	"	100,3	7,98	5,99	24,70	24,72
9	Indilatans	100,0	4,72	4,68	22,12	22,13
10	"	99,9	4,77	3,76	22,44	22,42
11	"	98,9	4,25	2,95	22,63	22,58
12	"	99,7	4,77	1,96	22,13	22,20
13	"	99,8	9,52	1,00	22,96	22,94

(Spalte 7), und aus diesen [Formel (45)]  $v$  und  $E$ , und hiermit weiter aus den Querabmessungen  $y$  und  $z$  die lateralen Eigenfrequenzen  $f_y$  und  $f_z$  (Spalten 12, 13). Da auch der Koppungskoeffizient  $\mu$  aus den Messungen an Rohren und Zylindern bekannt ist (im Mittel  $\mu = 0,290$ ), so sind alle Bestimmungsstücke gegeben, um aus der kubischen Gl. (51) das Spektrum der Eigenfrequenzen  $F$  zu berechnen. Die Resultate der Berechnung sind für die drei Nickelstäbe mit den Querschnitten  $10 \times 10$ ,  $10 \times 8,5$ ,  $10 \times 5$  in Form eines mit den Ordnungszahlen  $k$  beziferten Linienspektrums in Fig. 9 dargestellt, um ein anschauliches Bild von den Wurzeln der kubischen Frequenzgleichung (51) unserer Theorie zu geben. Von den drei für jeden der drei Stäbe übereinander gezeichneten Liniengruppen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ist  $A$  das theoretische Spektrum, während  $B$  und  $C$  beobachtete Frequenzen sind. In das Spektrum  $A$  ist außerdem die Lage der Eigenfrequenzen  $f_y$  und  $f_z$ , sowie der Seriegrenzen  $F_1$  (max),  $F_{II}$  (min),  $F_{II}$  (max) und  $F_{III}$  (min) eingetragen. Man sieht die in § 13 ohne Zahlenrechnungen aus der Theorie bereits gefolgerten Serien, und zwar zwei beim quadratischen und drei bei den übrigen Stäben, sowie die toten Zonen zwischen den Serien. Beim quadratischen Stab ( $y \cdot z = 10 \cdot 10$ ) ist nur eine solche Zone vorhanden.

Tabelle 10  
 Ergebnisse an rechteckigen Stäben

7	8	9	10	11	12	13	14
$f_z$ in kHz	$\varepsilon$ in ‰	$\delta_1$ in ‰	$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ in m/sec	$\frac{E}{10^{11}}$ in Dyn/cm <sup>2</sup>	$f_y$ ber. in kHz	$f_z$ ber. in kHz	$\mu$
24,79	+ 1,0	+ 0,8	4961	21,78	249,5	249,5	0,290
24,84	0,0	+ 0,8	4968	21,84	248,7	267,3	0,293
24,73	+ 0,5	+ 0,7	4962	21,79	248,3	291,9	0,290
24,76	- 2,0	+ 0,6	4954	21,72	247,8	360,0	0,287
24,80	+ 2,5	+ 0,5	4963	21,80	249,8	495,3	0,290
24,75	+ 0,5	+ 0,5	4963	21,80	{ 248,6 } { 242,4 }	829,9	0,286
24,76	+ 2,0	+ 0,4	4963	21,80	{ 248,1 } { 245,0 }	1653	0,283
24,72	+ 1,0	+ 0,4	4961	21,78	310,8	413,9	0,292
22,13	+ 0,5	+ 0,1	4426	15,89	468,3	473,2	0,228
22,42	- 0,5	+ 0,1	4484	16,31	469,3	595,9	0,225
22,58	- 2,5	+ 0,1	4466	16,18	525,2	756,9	0,225
22,20	+ 3,0	+ 0,1	4427	15,89	{ 463,8 } { 452,9 }	1129	0,215
22,94	- 1,0	+ 0,2	4578	17,00	240,5	2287	0,225

Ist  $z$  ein wenig kleiner als  $y$ , so bildet sich unterhalb von  $f_y$  eine weitere tote Zone aus, die sich mit abnehmendem  $z$  allmählich verbreitert, während sich zugleich die Zone zwischen Serie II und III nach höheren Frequenzen zu verschiebt. Die zahlreichen Linien an den Bandengrenzen beiderseits dieser Zonen konnten nicht mit eingezeichnet werden.

Die beobachteten Frequenzen im Spektrum  $B$  liegen in der Serie I bis etwa zur 7. Oberschwingung genau, bei den folgenden Oberschwingungen sehr nahe an den vorausberechneten Stellen bis zu etwa  $k = 11$ , d. h. bis kurz oberhalb derjenigen axialen Oberschwingung  $10 f_z$ , die bei unseren Stababmessungen ( $x = 100$ ,  $y = 10$  mm) mit der lateralen Schwingung  $f_y$  in Resonanz ist. Oberhalb der Resonanz haben wir, ähnlich wie bei Zylindern, weit mehr Eigenfrequenzen beobachten können, als nach der Theorie zu erwarten sind. Es treten daher die gleichen Schwierigkeiten wie bei Zylindern in der Zuordnung der beobachteten zu den berechneten Eigenfrequenzen auf, da sich die Ordnungszahlen in diesem Bereich experimentell nicht feststellen lassen. Diejenigen beobachteten Frequenzen, die einem theoretischen Wert sehr nahe kommen, sind im Spektrum  $B$  eingetragen, während alle übrigen beobachteten Frequenzen neben  $C$  besonders angegeben sind. Man

erkennt, daß auch in den theoretisch toten Zonen in Wirklichkeit zahlreiche Eigenfrequenzen vorhanden sind. Außerdem ist nachdrücklich zu betonen, daß die in *B* vorgenommene Zuordnung oberhalb  $k = 11$  (Serie I) äußerst fraglich ist. Rechnet man nämlich mit nur wenig anderen Werten von  $\mu$ ,  $f_y$  und  $f_z$ , als sie der Berechnung des Spektrums *A* zugrunde gelegt wurden, so kann das für eine Bestätigung der Theorie scheinbar nicht ungünstige Bild der Fig. 9 sich besonders in Serie II beträchtlich ändern. Bei den dünnsten Stäben ( $10 \times 3$  und  $10 \times 1,5$ ), wo die Frequenz  $f_z$  wesentlich höher als  $f_y$  ist, sollte man einfachere Verhältnisse erwarten, tatsächlich war das jedoch nicht der Fall, die Anzahl der mit den theoretischen übereinstimmenden, beobachteten Frequenzen war hier im Gegenteil noch geringer als bei den Stäben Fig. 9. Wir kommen daher zu dem Schluß, daß besonders im Gebiet der Serie II störende Eigenfrequenzen einer anderen Schwingungsart auftreten, die im Ansatz unserer Theorie nicht enthalten sind. Etwas besser als in Serie II sieht es am Anfang der Serie III aus, wo wenigstens die Vielheit nahe benachbarter Linien, besonders beim Stab  $10 \times 5$ , der Theorie entspricht.

Für eine quantitative Prüfung unserer theoretischen Formel müssen wir uns nach dem Vorausgehenden auf die beobachteten Frequenzen  $F$  der Serie I beschränken. Wir benutzen hierfür wieder ein graphisches Verfahren. Die Gl. (50) kann man in der Form:

$$(81) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{(k^2 f_x^2 - F^2)(f_y^2 - F^2)(f_z^2 - F^2)}{F^6} \\ - \mu^2 \frac{(k^2 f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 - 3 F^2)}{F^2} + 2\mu^3 = 0 \end{array} \right.$$

schreiben. Hierin sind die Größen  $f_x$ ,  $F$  und  $k$  durch die Messungen gegeben und  $f_y$  und  $f_z$  sind aus  $f_x$  und den Abmessungen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  berechenbar. Wir tragen für jeden Stab die Zahlenwerte des ersten Gliedes als Ordinaten über denjenigen des Klammerausdrucks im zweiten Glied als Abszissen auf (Fig. 10); dann müssen, wenn unsere Theorie richtig ist, alle Meßpunkte auf einer geraden Linie liegen. Aus der Neigung der Geraden gegen die Abszissenachse erhält man  $\mu^2$ . Dadurch, daß zugleich die Achsenabschnitte der Geraden  $2\mu$  bzw.  $-2\mu^3$  sein müssen, wird die Willkür in der Anpassung der Geraden an die Meßpunkte erheblich eingeschränkt. Die Lage der Achsenabschnitte behebt die in § 13 erwähnten Zweifel, die bei Ableitung der Gl. (50) über das Vorzeichen

des Kopplungskoeffizienten  $q$  und damit des Gliedes  $2\mu^3 F^6$  jener Gleichung bestehen können. Insoweit unsere Nickelstäbe als homogen und elastisch völlig gleich anzusehen sind, muß bei diesem Verfahren für alle acht Stäbe ein und dieselbe Gerade gelten. Wie Fig. 10 für die drei Stäbe vom Querschnitt  $10 \times 10$ ,  $10 \times 8,5$  und  $8 \times 6$  zeigt, sind alle Forderungen der Theorie gut erfüllt. Die niedrigsten Oberschwingungen  $k = 1$  bis 3 sind nicht berücksichtigt, weil hier

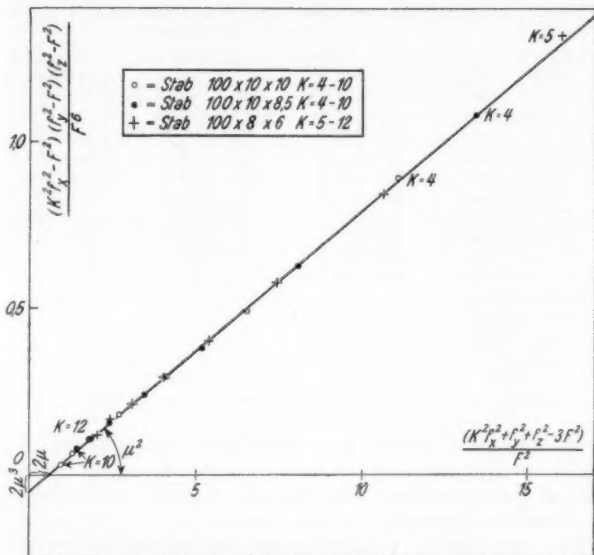


Fig. 10. Graphische Bestimmung des Kopplungskoeffizienten  $q = \mu$  bei rechteckigen Stäben

die Differenzen  $k^2 f_x^2 - F^2$  zu klein und deshalb zu ungenau sind und durch Inhomogenitäten ( $\epsilon$ -Korrektur) stark beeinflusst sein können. Ebenso befriedigend war die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Theorie bei der Mehrzahl der übrigen Stäbe. Nur bei den beiden schmalsten Nickelstäben Nr. 6 und 7 und bei dem Indilatansstab Nr. 12 zeigten sich für die höchsten Oberschwingungen kleine systematische Abweichungen von der Geradlinigkeit. Diese Unstimmigkeiten ließen sich zum Verschwinden bringen, wenn man für  $f_y$  niedrigere Werte (die eingeklammerten Zahlen in Spalte 12,

Ta-  
bell  
und  
Nr. 1

Beobachtete Eigenfrequenzen  $F$  von rechteckigen Stäben in Kilohertz

$$\Delta = \frac{F_{\text{beob.}} - F_{\text{ber.}}}{F_{\text{ber.}}}$$

$k$	Nr. 1 100 × 10 × 10			Nr. 2 100 × 10 × 9,3		Nr. 3 100 × 10 × 8,5		Nr. 4 100 × 10 × 7	
	$k f_z$	$F$	$\Delta$	$F$	$\Delta$	$F$	$\Delta$	$F$	$\Delta$
	in kHz	in kHz	in ‰	in kHz	in ‰	in kHz	in ‰	in kHz	in ‰
1	24,79	24,77	0	24,84	+ 1	24,72	0	24,81	+ 3
2	49,58	49,42	- 1	49,48	- 1	49,36	0	49,46	+ 1
3	74,37	73,82	0	73,78	- 2	73,66	- 1	73,89	0
4	99,16	97,74	0	97,99	0	97,71	0	98,00	0
5	124,0	121,2	0	121,5	0	121,2	- 1	121,7	0
6	148,7	143,6	0	144,2	0	144,0	0	144,7	0
7	173,5	164,9	0	165,8	+ 1	165,6	- 1	166,5	- 2
8	198,3	184,4	- 2	185,7	0	185,8	- 2	186,6	- 3
9	223,1	201,9	- 5	203,5	- 2	203,0	- 5	203,8	- 5
10	247,9	217,1	- 4	217,6	- 4	216,7	- 6	217,1	- 5
11	272,7	230,6	- 8	226,9	+ 2	225,4	- 1	—	—
12	297,5	239,9	- 3	236,4	—	228,5	0	—	—
13	322,3	252,4	0	—	—	—	—	—	—
14	347,1	259,3	- 1	—	—	—	—	—	—
15	371,9	266,1	+ 3	—	—	—	—	—	—
16	—	—	—	—	—	—	—	—	—
17	—	—	—	—	—	—	—	—	—
18	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Tab. 10) einsetzte, als sie sich aus  $v$  und  $y$  (Spalte 10 und 4) berechnen, und zwar um so viel niedriger ( $1-2\%$ ), daß die Größe der Achsenabschnitte  $2\mu$  und  $-2\mu^3$  der Neigung  $\mu^3$  der Geraden entsprach.

Das geschilderte Verfahren gibt also ein einfaches Mittel an die Hand, um auch bei rechteckigen Stäben aus Eigenfrequenzmessungen die Poissonsche Konstante  $\mu$  recht genau zu bestimmen. Die Ergebnisse sind in Spalte 14 der Tab. 10 angegeben. Dabei sind bei allen Stäben die berechneten Werte von  $f_p$ ,  $f_z$  zugrunde gelegt, mit Ausnahme der drei oben genannten Stäbe. Im Mittel ergibt sich aus allen rechteckigen Stäben für Nickel  $\mu = 0,289$  gegenüber 0,293 bei Rohren und 0,286 bei Zylindern, also bis auf etwa  $\pm 1\%$  das gleiche Resultat. Die Schwankungen der Einzelwerte übersteigen diesen Betrag nur bei den beiden Stäben  $10 \times 3$  und  $10 \times 1,5$  mit  $\mu = 0,286$  und 0,283, wahrscheinlich aus den erwähnten Gründen. Für Indilatans ist im Mittel aus den fünf rechteckigen Stäben  $\mu = 0,224$  gefunden. Für die beiden Zylinder

Tab. 11  
und ihre Abweichungen  $\Delta$  gegen die berechneten  
Nr. 1—8 Nickel, Nr. 10 Indilatans

Nr. 4 $10 \times 7$	Nr. 5 $100 \times 10 \times 5$		Nr. 6 $100 \times 10 \times 3$		Nr. 7 $100 \times 10 \times 1,5$		Nr. 8 $100 \times 8 \times 6$		Nr. 10 $100 \times 4,8 \times 3,8$	
	$F$	$\Delta$	$F$	$\Delta$	$F$	$\Delta$	$F$	$\Delta$	$F$	$\Delta$
	in kHz	in ‰	in kHz	in ‰	in kHz	in ‰	in kHz	in ‰	in kHz	in ‰
1	24,75	-2	24,74	0	24,71	-1	24,70	-1	22,44	+1
6	49,49	-1	49,34	-1	49,42	0	49,38	0	44,86	+1
9	74,03	-2	73,86	-1	74,00	0	73,88	0	67,17	-1
0	98,27	-2	98,18	0	98,24	0	98,15	0	89,54	0
0	122,1	0	122,0	+1	122,2	0	122,2	0	111,8	0
0	145,3	-1	145,1	0	145,4	0	145,9	0	134,0	0
-2	167,4	-1	167,2	0	167,5	+2	169,0	0	156,2	0
-3	187,6	-2	187,2	+1	187,5	0	191,5	-2	178,2	0
-5	204,6	-5	203,9	0	204,3	-2	212,8	0	200,1	0
-5	217,7	-7	216,5	+2	217,0	-2	232,9	-1	221,8	0
—	227,4	-4	—	—	226,7	+4	250,5	-3	243,3	+1
—	—	—	—	—	—	—	266,4	-1	264,7	0
—	—	—	—	—	—	—	—	—	285,7	0
—	—	—	—	—	—	—	—	—	306,1	-1
—	—	—	—	—	—	—	—	—	325,9	-2
—	—	—	—	—	—	—	—	—	345,4	-2
—	—	—	—	—	—	—	—	—	363,7	-3
—	—	—	—	—	—	—	—	—	380,3	-7

aus Indilatans ist  $\mu = 0,238$  nach Tab. 7. Der Unterschied ist nicht groß, wenn man beachtet, daß es sich um Material verschiedener Herkunft handelt und daß bei dieser Legierung auch der  $E$ -Modul sehr stark schwankt, nämlich zwischen 15,18 und  $17,00 \times 10^{11}$  Dyn/cm<sup>2</sup>.

Das graphische Verfahren gibt bei den höchsten Oberschwingungen, wo Ordinaten und Abszissen sehr klein sind, kein sicheres Urteil über das Maß der Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment. Wir haben deshalb mit den in der Tab. 10 angegebenen experimentellen Werten von  $f_2, f_3, f_4$  und  $\mu$  rückwärts die Frequenzen  $F$  berechnet.<sup>1)</sup> Für die niedrigen Oberschwingungen bis  $k = 4$  oder 5 haben wir die Näherungsformel (76), für die höheren die genaue kubische Gl. (51) benutzt. Die Differenzen der berechneten Frequenzen gegen die beobachteten sind in Tab. 11 unter  $\Delta$  angegeben.

1) Bei den beiden Stäben  $10 \times 3$  und  $10 \times 1,5$  sind dabei für  $f_2$  die eingeklammerten Zahlen von Spalte 12 der Tab. 10 eingesetzt.

Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment ist im ganzen ausgezeichnet, denn die Differenzen  $\Delta$  sind meist  $\leq 1\text{‰}$ . Bei  $k = 1$  sind sie infolge der schon erörterten Inhomogenitätskorrektur  $\varepsilon$  in zwei Fällen größer als  $1\text{‰}$ . Nur von  $k = 9$  ab haben die Differenzen  $\Delta$  bei überwiegend negativem Vorzeichen größere Beträge bis zu  $8\text{‰}$ . Ob es sich hier um systematische Abweichungen handelt, können wir noch an einer anderen Folgerung unserer Theorie prüfen. Nach § 13, g müssen nämlich für unsere sieben Nickelstäbe, die alle die gleiche Länge  $x = 100$  mm und Querschnittsseite  $y = 10$  mm haben, im Falle der Resonanz  $k f_x = f_y$ , also bei der 10. Oberschwingung, die Eigenfrequenzen  $F_{10}$  der Serie I gleich groß, nämlich gleich  $\frac{f_y}{\sqrt{1 + \mu}}$ , unabhängig von der Größe von  $z$  sein.

Daß dies nahezu zutrifft, lehrt ein Blick auf Tab. 11 und auf die Kurven P und Q in Fig. 1 b, § 3, welche die beobachteten Harmonieabweichungen unserer 100 mm langen Nickelstäbe Nr. 1 und 7 von den Seitenverhältnissen 10:10 bzw. 10:1,5 des Querschnitts darstellen. Die Kurven schneiden sich in der Tat bei  $k = 10$ . Die entsprechenden Kurven für alle unsere übrigen Nickelstäbe, deren Seitenverhältnisse zwischen jenen Extremwerten liegen, verlaufen in dem Raum zwischen P und Q und schneiden sich alle nahezu in demselben Punkt bei  $k = 10$ . Genau braucht es deshalb nicht zu stimmen, weil die Abmessungen nicht bei allen Stäben genau  $x = 100$  und  $y = 10$  mm sind. Die kleinen Differenzen kann man aber leicht in Rechnung setzen. Ist nämlich  $k f_x$  nicht genau gleich  $f_y$ , sondern

$$(82) \quad k f_x = f_y (1 + \alpha),$$

wo  $\alpha$  eine gegen eins kleine Zahl (Größenordnung  $1\text{--}2\text{‰}$ ) ist, so gilt die folgende Gleichung:

$$(83) \quad F^2 = \frac{f_y^2 (1 + \alpha)}{1 + \mu} = \frac{k f_x f_y}{1 + \mu}.$$

Diese Formel gibt den einfachsten Weg zur Bestimmung von  $\mu$  bzw., unter Berücksichtigung der Gleichung (75), des Torsionsmoduls. Setzen wir die Zahlenwerte für  $F$ ,  $f_x$  und  $f_y$  aus Tab. 10 in (83) ein, so erhalten wir jedoch bei allen Stäben höhere Werte für  $\mu$  als die in Spalte 14 der Tab. 10 angegebenen, im Mittel aus allen Stäben 0,307 gegenüber dem Wert 0,289, bei dem alle Oberschwingungen berücksichtigt sind. Dies Resultat führt zu der Vermutung, daß die Stäbe infolge des Ziehprozesses nicht völlig isotrop sind, daß also für die  $y$ -Richtung ein anderer  $E$ -Modul gilt als für die



$x$ -Richtung. Die Anisotropie brauchte nur geringfügig zu sein, denn berechnet man umgekehrt aus Gl. (83)  $f_y$ , indem man für  $\mu$  die Zahlenwerte von Spalte 14 der Tab. 10 einsetzt, so erhält man um 1—1,5% niedrigere Werte als die Werte der Spalte 12. Dieser Befund entspricht dem oben erörterten Ergebnis der graphischen Methode bei den beiden Stäben  $10 \times 3$  und  $10 \times 1,5$  sowie den Ergebnissen an Nickelzylindern (§ 11). Wir haben daraufhin aus dem Zylinder von 20 mm Durchmesser, aus dem alle rechteckige Nickelstäbe herausgeschnitten waren, durch radialen Schnitt ein dünnes Stäbchen von etwa 20 mm Länge und 4 mm<sup>2</sup> Querschnitt herstellen lassen, seine Grundfrequenz gemessen und daraus den  $E$ -Modul berechnet. Es ergab sich bis auf wenige Promille, also innerhalb der möglichen Unsicherheit, gleich dem Mittelwert von Spalte 11 Tab. 10. Wir müssen deshalb den Schluß ziehen, daß eine durch die Struktur bedingte Anisotropie nicht vorliegt. Es besteht aber noch eine andere Erklärungsmöglichkeit für eine Anisotropie. Das konstante axiale Magnetfeld, das zur Schwingungserregung notwendig ist, vergrößert wie bekannt, den  $E$ -Modul für Schwingungen<sup>1)</sup> in Richtung der Stabachse  $x$ . Wenn dieses Feld in den dazu senkrechten Schwingungsrichtungen  $y$  und  $z$  keine Moduländerung hervorrufen sollte, worüber man nichts weiß, so müßte  $E_{||} > E_{\perp}$  sein, wie man in der Tat aus unseren Beobachtungen [ $f_y$  (ber.)  $>$   $f_y$  (beob.)] schließen könnte, und zwar um so größer, je größer der  $\Delta E$ -Effekt ist. Bei unseren harten Stäben ist er sehr klein, bei Sättigung weniger als 1%. Wir haben nun einen der Stäbe durch thermische Behandlung weich gemacht und dadurch eine Vergrößerung des  $\Delta E$ -Effektes für die axialen Schwingungen auf etwa 4% bewirkt. Aus den Messungen der Eigenfrequenzreihe des weichen Stabes haben sich jedoch keine Anzeichen einer Vergrößerung des Unterschiedes zwischen  $E_{||}$  und  $E_{\perp}$  gegenüber dem harten Stab ergeben. Hiernach scheint auch eine magnetische Anisotropie nicht zu bestehen. Die Ursache der fraglichen systematischen Abweichungen, die ja im übrigen recht klein sind, ist wahrscheinlich in den zahlreichen, durch unsere Theorie nicht erkläraren Eigenfrequenzen in der Serie II zu suchen.

Bei unserem Stab Nr. 7 ist die eine Querschnittsseite  $z$  klein gegen  $y$ . Für diesen Fall gilt im Bereich der Serie I die quadratische Frequenzgleichung. Sie gestattet die beiden Eigenfrequenzen einer rechteckigen Platte beliebigen Seiten-

1) E. Giebe u. E. Blechschmidt, a. a. O.

verhältnisses zu berechnen. Durch die Messung am Stab Nr. 7 wird für die tieferen der Eigenfrequenzen die Richtigkeit dieser Formeln erwiesen bis zum Grenzfall des Quadrates. Auch die in der theoretischen Formel angegebene tiefere Eigenfrequenz eines Würfels wird durch unsere Messung an dem quadratischen Nickelstab sehr nahe bestätigt.

§ 15. **Schlußfolgerungen und einige Anwendungen auf piezoelektrische Resonatoren**

Unsere Untersuchungen haben gezeigt, daß die Harmonieabweichungen der Dehnungsschwingungen von Stäben durch das Verhältnis  $V$  der axialen zur radialen oder lateralen Eigenfrequenz bestimmt sind. Wenn man also z. B. einen zylindrischen Stab mit einem dünnwandigen Rohr von gleichem Durchmesser und gleicher Länge hinsichtlich ihrer Harmonieabweichungen in der Frequenzserie I miteinander vergleichen will, so ist als Bezugsgröße nicht, wie in Fig. 1b, die Ordnungszahl  $k$ , sondern jenes Verhältnis  $V = \frac{k f_s}{f_r}$  zu wählen, wie das in Fig. 1c geschehen ist. Man erkennt dann, daß für den gleichen Wert von  $V$  die Harmonieabweichungen des Zylinders viel größer sind als diejenigen des Rohres, umgekehrt wie in Fig. 1b. Da nun, wie wir in § 13 gezeigt haben, für einen Stab von quadratischem Querschnitt ( $y = z$ ) sowie für einen dünnen breiten Stab ( $y \gg z$ ) ebenso wie bei Rohr und Zylinder nur eine einzige laterale Eigenfrequenz  $\frac{f_s}{\sqrt{1-\mu^2}}$  bzw.  $f_y$  maßgebend ist, so ist in der Darstellung der Fig. 1c auch die Vergleichung dieser rechteckigen Stäbe mit Rohr und Zylinder möglich, wenn man  $V = k f_s : \frac{f_y}{\sqrt{1-\mu^2}}$  beim quadratischen und  $V = \frac{k f_s}{f_y}$  bei dem anderen Stab setzt. Es ergibt sich das einfache und einleuchtende Resultat, daß die Harmonieabweichungen für quadratischen und zylindrischen Stab einerseits sowie für ein dünnes Rohr und einen dünnen, breiten Stab andererseits bei gleichem Verhältnis  $V$  nahe bzw. genau gleich groß sind. Da alle Frequenzgleichungen dem Ähnlichkeitsgesetz genügen (vgl. § 5), so gelten die Kurven Fig. 1c nicht nur für die dort angegebenen, sondern für beliebige Stababmessungen der 4 Querschnittsformen. Die Harmonieabweichungen bei Resonanz ( $V = 1$ ) sind, wenn  $\mu = \frac{1}{4}$  bzw.  $\frac{1}{3}$  ist, für Zylinder 18,0 bzw. 24,5%, für quadratische Stäbe 18,5

bzw. 25%, für Rohre und für Stäbe von schmaler Rechtecksform 12 bzw. 15,5%.

Wir haben bei der Ableitung unserer Formel in allen Fällen nur die lateralen Grundeigenschwingungen berücksichtigt, alle lateralen Oberschwingungen aber vernachlässigt. Daß dies bei Rohren streng richtig ist, haben wir in § 5 bereits mit Symmetrieüberlegungen begründet; es wird außerdem durch die Messungen bestätigt, denn in den Frequenzbereich der Serie II des Rohrspektrums (Fig. 3) fallen die Ringoberschwingungen der Ordnungen  $n = 1 - 4$  [vgl. Formel (12)], ohne daß irgendeine Störung in dem durch die Formel (16) gegebenen regelmäßigen Verlauf des Spektrums beobachtet wäre. Beim Zylinder fällt die erste radiale Oberschwingung, die den 2,8fachen Frequenzwert der Grundschiwingung hat, in den Bereich, wo nach § 11 bereits zahlreiche Störschwingungen beobachtet wurden, so daß eine Berücksichtigung dieser Oberschwingung zwecklos erscheint. Bei rechteckigen Stäben können, wie eine Symmetrieüberlegung lehrt, durch Kopplung mit den axialen nur ungeradzahlige laterale Oberschwingungen angeregt werden<sup>1)</sup>, also nächst der Grundschiwingung  $f_y$ , die schon viel höhere Oberschwingung  $3f_y$ . Jedoch ist bei unserem Nickelstab Nr. 5 ( $y = 10$ ,  $z = 5$  mm)  $3f_y = 1,5f_z$ , also nur noch wenig größer als  $f_z$ , und beim Nickelstab Nr. 7 ( $y = 10$ ,  $z = 1,5$  mm) ist die dritte Oberschwingung in der  $y$ -Richtung sogar niedriger als die Grundschiwingung in der  $z$ -Richtung ( $3f_y = 0,45f_z$ ). Bei diesen Stäben wenigstens hätten wir also in unserer Theorie außer den Eigenfrequenzen  $f_y$  und  $f_z$  auch  $3f_y$  berücksichtigen müssen. Wir haben darauf verzichtet dies zu tun, weil die oberhalb der Frequenzserie I zweifellos vorhandenen Störschwingungen eine experimentelle Prüfung der Theorie kaum möglich erscheinen lassen. Es sei darauf hingewiesen, daß im Frequenzbereich der Serie I bei dem dünnsten Stab Nr. 7 der Einfluß von  $f_z$  zu vernachlässigen ist und mit wachsendem  $z$  zunächst nur langsam zunimmt.

In unserer Kopplungstheorie der Dehnungsschwingungen ist der Kopplungskoeffizient gleich der Poissonschen Konstanten  $\mu$  oder bei zylindrischen und quadratischen Stäben eine einfache Funktion von  $\mu$ . Nachdem die Richtigkeit unserer Theorie erwiesen ist, haben wir also eine neue und genaue Methode zur Bestimmung dieser wichtigen elastischen Konstanten zur Verfügung. Diese hat im Hinblick auf immer

1) Experimentell durch Messungen an Quarzstäben bestätigt, vgl. E. Giebe u. A. Scheibe, a. a. O., S. 165.

vorhandene Inhomogenitäten vor anderen Methoden den Vorteil, daß sie  $\mu$  nicht für eine engbegrenzte Stelle eines Stabes sondern als Integralwert über den ganzen Stab liefert. Zugleich ergibt sich auch die zweite elastische Konstante, der Elastizitätsmodul  $E$  und zwar bei Oberschwingungen ein Mittelwert  $E$ , der weniger durch Inhomogenitäten beeinflusst ist, als bei der üblichen Bestimmung aus der Grundschiwingung. Die Methode erfordert allerdings zur Erzielung einer guten Genauigkeit die Anregung recht hoher Oberschwingungen; solche sind am leichtesten bei Rohren anregbar, die deshalb und wegen ihrer theoretischen Einfachheit bei Anwendung dieser Methode massiven Stäben vorzuziehen sind. Das von uns benutzte Verfahren zur Schwingungserregung setzt ferromagnetische Stoffe von hinreichend großer Magnetostriktion voraus. Doch ist bereits von Röhrich<sup>1)</sup> ein anderes, für beliebige Metallstäbe und für hohe Oberschwingungen brauchbares Verfahren der Schwingungserregung angegeben. Ob dieses Verfahren allerdings hinreichend störungsfrei arbeitet, mag dahingestellt bleiben; jedenfalls haben die Untersuchungen von Röhrich an Zylindern nur Andeutungen der von uns gefundenen Gesetzmäßigkeiten ergeben.

Daß unsere Theorie in wesentlichen Punkten auch für äolotrope Stäbe gilt, ist durch Untersuchungen von Giebe und Scheibe an Quarzstäben, die ja, wie in § 1 bemerkt, die Anregung zur vorliegenden Arbeit gaben, bereits erwiesen. Es ist aber von Interesse zu prüfen, inwieweit die jetzt gefundenen Gesetze unter Berücksichtigung der durch Äolotropie bedingten Abänderungen der Formeln auch für Quarzstäbe quantitative Gültigkeit haben. In dem besonders einfachen Fall eines Quarzrohres in quasiisotroper Orientierung fanden wir in § 9 bereits unsere Theorie bestätigt. Was andere Orientierungen betrifft, so liegen, wie wir bereits aus der älteren Untersuchung wissen, einfachere Verhältnisse nur bei rechteckigen Quarzstäben vor, deren Achse parallel zur elektrischen und senkrecht zur optischen Achse ist. Die Bearbeitung des früheren, an so orientierten Stäben gewonnenen Beobachtungsmaterials lehrte nun, daß unsere Theorie die wirklichen Erscheinungen nicht vollständig richtig wiedergibt. Die Unstimmigkeiten bestehen insbesondere darin, daß die Harmonieabweichungen mit zunehmendem Verhältnis der kleinen zur größeren Querschnittsseite viel stärker zunehmen als bei isotropen Stäben. Bei quadratischem Querschnitt scheint also der mittlere

1) K. Röhrich, a. a. O.

Kopplungskoeffizient größer zu sein, als bei schmaler Rechtecksform. In letzterer Form kommen wesentlich nur zwei Freiheitsgrade in Betracht, die theoretische Behandlung ist deshalb einfach, man kann mit der Formel (14) rechnen. Bei der Staborientierung, die sich schon früher als die einfachste erwiesen hat (Stabachse parallel zur elektrischen Achse), hat man zwei Fälle zu unterscheiden: 1. die größere Querschnittsseite ist senkrecht zur optischen (Z-) und zur elektrischen (X-)Achse, fällt also in die Richtung der dritten Hauptachse (Y). 2. Sie ist parallel zur Z- und senkrecht zur X- und Y-Achse. Ist im ersten Fall die Seite  $z$  klein gegen die Seite  $y$ , so haben wir einen quasiisotropen Stab ähnlich wie bei der Kreisplatte in § 11. Die Berechnungen der früheren Messungen nach Formel (14) ergaben folgendes: Für zwei Stäbe mit den Seiten  $y = 6$ ,  $z = 1,5$  mm bzw.  $y = 3$ ,  $z = 0,75$  mm

$$q = \frac{s_{12}}{s_{11}} = 0,124 \text{ bzw. } 0,129.$$

Nach Voigts statischen Messungen ist  $\frac{s_{12}}{s_{11}} = 0,130$ , während Giebe und Scheibe durch Extrapolation ihrer empirischen Formel 0,128 fanden. Für zwei gleiche Stäbe  $z = 6$ ,  $y = 1,5$  mm der anderen Sorte ergab sich  $q = 0,114$  bzw. 0,101, d. h. angenähert der gleiche Wert  $q = \frac{s_{12}}{\sqrt{s_{11} s_{33}}} = 0,117$ , der in § 9 aus den Messungen an einem Quarzrohr ermittelt wurde.

Nach Voigt ist  $\frac{s_{12}}{\sqrt{s_{11} s_{33}}} = 0,135$ . Man kann aus diesen Ergebnissen wohl den Schluß ziehen, daß unsere Methode auch bei Quarzstäben, wenn die Abmessungen geeignet gewählt werden, das im Vergleich zu Nickel viel kleinere Verhältnis von Querkontraktion zu Längsdilatation nahe richtig zu ermitteln gestattet.

Bei Quarzstäben, die den genannten besonderen Bedingungen nicht entsprechen, ist unsere Theorie nicht ausreichend, sie bedarf einer Ergänzung, die wahrscheinlich die mit den Dehnungsschwingungen verknüpften periodischen Winkeländerungen, also Eigenschwingungen ganz anderer Art, zu berücksichtigen hätte.<sup>1)</sup> In Kristallen gibt es ausgezeichnete

1) Zu diesem Schluß wird man auch noch auf folgendem Wege geführt. E. Giebe u. A. Scheibe haben gefunden (Jahrb. d. drahtl. Telegraphie und Telephonie 41. S. 83. 1933), daß Quarzstäbe, die senkrecht zur optischen und parallel zur elektrischen Achse orientiert sind, bei gewissen Verhältnissen ihrer Abmessungen einen verschwindend

Richtungen, in welchen Dehnungen nicht mit Querkontraktion verbunden sind. Für Stäbe, deren Achse in eine solche Richtung fällt, besteht nach unserer Theorie keine Kopplung von lateralen mit den axialen Schwingungen. Die letzteren müßten also, unbeeinflußt durch Resonanz, genau harmonisch sein. Nach Messungen von Voigt<sup>1)</sup>, trifft nun beim Turmalin für die Richtung der optischen Achse die genannte Voraus-

setzung ungefähr zu, denn  $\mu = \frac{s_{12}}{s_{33}}$  hat den sehr kleinen Wert

von 0,026. Wir haben daraufhin einen rechteckigen Turmalinstab in der erforderlichen Orientierung von der Länge  $z = 23,4$  mm und dem Querschnitt  $2 \times 1,5$  mm, der sich piezoelektrisch leicht zu longitudinalen Schwingungen anregen ließ, untersucht. Es ergaben sich in der Tat sehr kleine Harmonieabweichungen, die bei der 14. Oberschwingung, 5% unterhalb der Resonanzfrequenz, erst 4,4% betrugen gegenüber etwa 11% bei einem gleichdimensionierten Nickelstab. Da ein solcher Turmalinstab ebenso wie unser Quarzrohr (§ 9) als quasiisotrop anzusehen ist, so sollte unsere kubische Frequenzgleichung (50) annähernd Gültigkeit haben. Eine graphische Darstellung nach Art von Fig. 10 ergab eine gerade Linie und aus deren Neigung  $\mu = 0,10$ , jedoch hatten die Achsenabschnitte nicht annähernd die von der Theorie geforderte Größe. Entsprechend

wie beim Quarzrohr sollte  $\mu = \frac{s_{12}}{\sqrt{s_{11} s_{33}}}$  sein, d. i. nach Voigt

0,033. Unsere Messungen bestätigen zwar größenordnungsmäßig die Erwartungen, ergeben aber einen deutlich höheren Wert von  $\mu$ . Auch hier ist anscheinend unsere Theorie nicht erschöpfend.

Aus unseren Untersuchungen ergibt sich für die praktische Benutzung von Magnetostruktionsoszillatoren als Frequenznormale, daß man wohldefinierte Eigenschwingungen *sehr hoher* Frequenz mit Hilfe von Rohren erhalten kann und zwar im Bereich der Serie II, oberhalb des Gebietes der Resonanz zwischen axialen und radialen Schwingungen. Massive Stäbe sind nur im Bereich der Serie I brauchbar, weil kurz oberhalb

---

kleinen Temperaturkoeffizienten der Frequenz haben, indem sich offenbar verschiedene thermische Einflüsse kompensieren. Bei den gegebenen Größen und Vorzeichen der Temperaturkoeffizienten der Frequenzen in der Richtung parallel und senkrecht zur optischen Achse ist diese experimentelle Tatsache aus unserer kopplungstheoretischen Formel nicht abzuleiten.

1) W. Voigt, Lehrb. d. Kristallphysik, S. 753.



der Resonanzfrequenz schwer identifizierbare Störschwingungen<sup>1)</sup> auftreten. Für Resonatoren großer Eigenfrequenz von zylindrischer Form muß man die Abmessungen so wählen, daß die elastische Halbwellenlänge der Axialschwingung noch etwas größer als der Durchmesser ist. Entsprechend sind rechteckige Stäbe zu dimensionieren. Für piezoelektrische Resonatoren kommen praktisch Quarzrohre kaum in Betracht. Bei Frequenznormalen aus rechteckigen Quarzstäben ist ebenfalls die höchste erreichbare Frequenz durch den Beginn der Resonanz bestimmt.<sup>2)</sup>

Als Steuerquarze verwendet man vielfach Kreisplatten, und regt sie in ihrer Dickenschwingung an, die sich senkrecht zur Plattenebene in Richtung der Plattenachse fortpflanzen. Derartige Plattenschwingungen kann man für isotrope Stoffe nach unserer Kopplungstheorie in entsprechender Weise behandeln wie die Zylinderschwingungen. Bei Anwendung von Gl. (14) hat man statt einer Reihe von axialen Schwingungen und einer radialen umgekehrt eine axiale Schwingung in Richtung der Plattendicke und die in diesem Fall nicht harmonische Reihe  $f_r$ , der durch Gl. (34) gegebenen radialen Schwingungen anzusetzen. Die Dickenschwingungen sind dann die Schwingungen niedrigster Frequenz der Serie II, deren Grenzwert

$$F_n(\text{min}) = \frac{f_z}{\sqrt{1 - q^2}}$$

ist. Der Kopplungskoeffizient  $q$  ist durch Gl. (42) gegeben, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v$  ist nach (65) größer als  $\sqrt{E/\rho}$ . Qualitativ wird man diese Überlegungen auch auf Kreisplatten aus Quarz übertragen können. Aus der Frequenz der Dickenschwingung einer Quarzplatte muß sich also nach unserer Theorie eine größere Fortpflanzungsgeschwindigkeit ergeben, als aus der axialen Grundschwingung langer Quarzstäbe von entsprechender Orientierung. Dies ist in der Tat nach Messungen von Hund<sup>3)</sup> an Quarzplatten, deren Ebene senkrecht zur elektrischen Achse orientiert ist, der Fall, Hund

1) K. Röhrich, a. a. O., hat bei zylindrischen Stäben ebenfalls zahlreiche Störschwingungen beobachtet und stellt aus Staubfiguren fest, daß diese Schwingungen transversaler Natur sind. Auch E. Giebe und A. Scheibe haben an Quarzstäben oberhalb der Resonanz Störschwingungen beobachtet, der Charakter derselben konnte jedoch nach dem Aussehen der piezoelektrischen Leuchtbilder und aus anderen Gründen nicht als transversal bezeichnet werden.

2) Vgl. hierzu E. Giebe u. A. Scheibe, a. a. O.

3) A. Hund, Proc. of the Inst. of Rad. Eng. 14. S. 447. 1926.



beobachtete einen Unterschied<sup>1)</sup> von rund 5%. Unsere Theorie gibt uns ferner die Erklärung für eine andere bei Dickenschwingungen von Quarzplatten der genannten Orientierung auftretende Erscheinung. Es ist seit längerem bekannt<sup>2)</sup>, daß derartige Quarzresonatoren die unangenehme Eigenschaft haben, nicht *eine*, sondern mehrere nahe benachbarte Eigenfrequenzen zu besitzen, so daß bei Verwendung als Steuerquarz die Senderfrequenz unter Umständen plötzlich auf einen anderen, ein wenig verschiedenen Wert umspringt. Eine der Ursachen für dieses Verhalten ist jedenfalls darin zu suchen, daß am Anfange der Serie II kurz oberhalb von  $F_{II}$  (min) auch bei der Platte ähnlich wie bei Rohren und Stäben das schon in § 6 besprochene Bandenspektrum auftritt (vgl. Fig. 3), in dem jeder der radialen Oberschwingungen eine axiale (Dicken-)Schwingung entspricht; je nach den Dimensionsverhältnissen liegen diese Axialschwingungen mehr oder weniger nahe beieinander. Diese als Folge der Kopplung auftretende Vielheit der Eigenfrequenzen läßt sich also prinzipiell nicht vermeiden, auch dann nicht, wenn man nach Straubel<sup>3)</sup> die Umrandung der Platte nicht kreisförmig, sondern so wählt, daß die Radien proportional den Wurzeln aus den Elastizitätsmoduln in den verschiedenen Richtungen sind. Durch solche Formgebung wird zwar erreicht, daß statt der zwei radialen Grundschwingungen, die eine Kreisplatte der obengenannten Orientierung hat<sup>4)</sup>, nur noch deren eine (nebst Oberschwingungen) vorhanden ist; dadurch kann die Zahl der Eigenfrequenzen im Bandenspektrum geringer werden, es muß aber immer noch eine Mehrheit von Eigenfrequenzen bestehen bleiben. Da mit einer Dickenschwingung immer eine der radialen Schwingungen gekoppelt ist, so folgt, daß bei den resultierenden, wirklichen Schwingungen die Plattenebenen nicht planparallel hin und her schwingen können, sondern wesentlich kompliziertere Bewegungen ausführen müssen, was auch durch optische und andere Methoden von verschiedenen Forschern festgestellt ist.

Für Steuerquarze bei den höchsten praktisch gebrauchten Frequenzen muß man trotz ihres verwickelten Verhaltens Platten verwenden. Für niedrigere Frequenzen (z. B. 50 bis

1) Rechnet man mit  $q = 0,24$  nach Tab. 7, so ergibt sich aus unseren Untersuchungen ein Unterschied von 3%.

2) Vgl. z. B. P. v. Handel, ENT. 7. S. 38. 1930; S. Namba u. S. Matsumura, Res. Electrot. Lab. Tokio Nr. 248, 1929, S. 6.

3) H. Straubel, Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Telephon. 53. S. 14. 1931.

4) A. Hund, Proc. Inst. Radio Eng. 14. S. 447. 1926; A. Meissner, Phys. Ztschr. 28. S. 621. 1927.

100 kHz) erscheint es zweckmäßiger, Quarzstäbe zu benutzen, und zwar bei Oberschwingungen die hinreichend weit ab von der Resonanzstelle liegen, weil diese Schwingungen unter diesen Umständen von wesentlich einfacherer Form, nämlich nahezu rein axialer Natur sind. Diese Überlegungen waren zum Teil maßgebend für die Ausrüstung der Quarzuhr<sup>1)</sup> der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt mit einem rechteckigen Quarzstab zur Sendersteuerung.

#### § 16. Zusammenfassung

Unter Benutzung bekannter kopplungstheoretischer Beziehungen wird eine neue Theorie der Dehnungsschwingungen von Rohren und von Stäben mit kreisförmigem oder rechteckigem Querschnitt entwickelt und durch Messungen weitgehend bestätigt.

Das Rohr und der Zylinder wird dabei als ein Gebilde behandelt, das aus zwei miteinander gekoppelten, resonierenden Schwingungssystemen besteht. Unbeeinflusst vom anderen würde das eine System rein axiale, das andere rein radiale Schwingungen ausführen. Die harmonische Reihe der ersteren gehorcht dem bekannten Gesetz für longitudinale Schwingungen dünner Stäbe, die letzteren sind Dehnungsschwingungen eines dünnen Ringes bzw. einer dünnen Kreisscheibe.

Die Kopplung erfolgt durch die kinetische Energie (Beschleunigungskopplung). Der Kopplungskoeffizient  $q$  ist aus dem Verhältnis der radialen Grundeigenfrequenz  $f_r$  einer Kreisplatte bzw. eines Ringes zu derjenigen  $f_r'$  eines unendlich langen Zylinders bzw. Rohres zu berechnen. Für diese vier Eigenfrequenzen sind Formeln bereits bekannt, die mit den Hilfsmitteln der allgemeinen Elastizitätstheorie abgeleitet sind. Der Koeffizient  $q$  ist gleich dem Verhältnis  $\mu$  von Querkontraktion zur Längsdilatation (Poissonsche Konstante) oder eine einfache Funktion von  $\mu$ .

Die Kopplungstheorie ergibt für jede Ordnung  $k$  der axialen Schwingungen zwei Frequenzen, d. h. zwei Serien I und II von Eigenfrequenzen; diese sind durch eine „tote Zone“ voneinander getrennt, in welcher bei gegebenem Radius unter keinen Umständen Dehnungsschwingungen entstehen können, wie man auch die Länge des Rohres und des Zylinders oder die Ordnungszahl wählen mag. Im Spektrum der Eigenfrequenzen tritt beiderseits der toten Zone eine Vielheit von

1) A. Scheibe u. U. Adelsberger, Phys. Ztschr. **33**. S. 835. 1932.

Linien auf, eine Art Bandenspektrum, deren Bandenkopf gleich der Grenzfrequenz  $F_1$  (max) bzw.  $F_{II}$  (min) von Serie I bzw. II ist.  $F_1$  (max) ist gleich  $f_r$ ,  $F_{II}$  (min) =  $f_r'$ . Die tote Zone ist ein Gebiet anomaler Dispersion, in dem die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einen Sprung erleidet.

Die aus unserer Kopplungstheorie in überaus einfacher Weise folgende Frequenzgleichung für das Rohr stimmt mit einer von Love angegebenen Formel überein, die mit den Hilfsmitteln der allgemeinen Elastizitätstheorie auf einem ganz anderen, weit mühsameren Wege abgeleitet ist.

Der rechteckige Stab wird entsprechend als ein Gebilde von drei Teilsystemen behandelt, von denen jedes mit jedem anderen gekoppelt ist. Jedes Teilsystem würde unbeeinflusst von den übrigen wie ein sehr dünner Stab schwingen. Die drei Kopplungskoeffizienten sind gleich groß und gleich  $\mu$ . Die in diesem Fall kubische Frequenzgleichung ergibt drei Eigenfrequenzen für jede Ordnung  $k$ , also drei Frequenzserien.

Die allgemeine Formel führt bei entsprechender Spezialisierung zu Ausdrücken für die Dehnungseigenfrequenzen eines Rechtecks, Quadrats und Würfels, eines unendlich langen rechteckigen oder quadratischen Stabes sowie einer unendlich ausgedehnten planparallelen Platte, und zwar im letzteren Fall in Übereinstimmung mit einer bereits bekannten Formel.

Zur experimentellen Prüfung der Theorie wurden die Dehnungseigenfrequenzen einer größeren Anzahl von Rohren, Zylindern und rechteckigen Stäben aus Nickel und Nickellegierungen gemessen. Anregung und Nachweis der Schwingungen erfolgte mit Hilfe der Magnetostriktion in einer Resonatorschaltung. Am leichtesten ließen sich Rohre zu Dehnungsschwingungen anregen, hier wurde die 31. Oberschwingung (809 kHz) erreicht, bei der die elastische Halbwellenlänge nur noch ein Drittel des Rohrdurchmessers war.

Die Meßergebnisse bestätigten die Theorie beim Rohr in jeder Beziehung und mit großer Genauigkeit. Die Dehnungsschwingungen eines Rohres können als Schulbeispiel von großer Anschaulichkeit für die Theorie gekoppelter Systeme dienen.

Auch bei Zylindern und rechteckigen Stäben konnte die Theorie in einem weiten Frequenzbereich durch die Messungen bestätigt werden. Die Gültigkeit der theoretischen Formeln erstreckt sich bis zu dem Bereich, wo die radialen bzw. lateralen Schwingungen in Resonanz mit den axialen kommen. Jenseits der Resonanz treten bei diesen Querschnitten Störschwingungen auf, die eine Nachprüfung der Theorie in diesem Bereich unmöglich machten.

Unsere Theorie gibt uns eine neue genaue Methode an die Hand, um durch Messung der Dehnungseigenfrequenzen hoher Ordnung an Rohren, zylindrischen oder rechteckigen Stäben neben dem Elastizitätsmodul (Dehnungsmodul) das Verhältnis von Querkontraktion zur Längsdilatation (Poissonsche Konstante) und damit auch den Torsionsmodul zu bestimmen.

Die aus der Theorie sich ergebenden Formeln gelten zunächst nur für isotrope Medien. In einigen Sonderfällen konnten sie mit Erfolg auch auf ein Rohr und auf rechteckige Stäbe aus Quarz von geeigneter Orientierung und Dimensionierung angewandt werden.

Einige Erscheinungen, die an piezoelektrischen Resonatoren aus Quarzplatten auftreten, konnten mit Hilfe der kopplungstheoretischen Vorstellungen gedeutet werden.

Berlin-Charlottenburg.

(Eingegangen 31. Juli 1933)

---

**Zur unrelativistischen Theorie  
des kontinuierlichen Röntgenspektrums**

**Von Fritz Sauter**

1. Problemstellung

Die wellenmechanische Behandlung des Röntgenbremspektrums<sup>1)</sup> beruht bekanntlich auf der Vorstellung, daß ein freies Elektron der Energie  $E_0$ , beschrieben durch eine Wellenfunktion  $\psi_0$ , beim Zusammenstoß mit schweren Teilchen (Atome der Antikathode) einen Teil seiner Energie als Strahlungsquant abgeben und dabei in einen Zustand  $\psi$  mit der Energie  $E$  übergehen kann. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dieser Prozeß in der Zeiteinheit stattfindet und daß dabei das Lichtquant innerhalb des kleinen Raumwinkels  $d\omega$  in die durch den Einheitsvektor  $\mathbf{n}$  bestimmte Richtung davonfliegt, wird nach der Wellenmechanik gegeben durch<sup>2)</sup>

$$(1) \quad w(\mathbf{q}, \mathbf{s}) d\omega = \frac{e^2 \hbar \nu}{2\pi m^2 c^3} |P_{E, E_0}^{q, s}|^2.$$

Dabei ist das Matricelement  $P_{E, E_0}^{q, s}$  — bei nichtrelativistischer Rechnung —

$$(2) \quad P_{E, E_0}^{q, s} = \int \psi^* e^{-\frac{i}{\hbar}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})} (\mathbf{s} \cdot \text{grad}) \psi_0 d\tau.$$

$\mathbf{s}$  bedeutet den Einheitsvektor in der Polarisationsrichtung des Lichtes und  $\mathbf{q} = \frac{\hbar \nu}{c} \mathbf{n}$  ist der Impulsvektor der Lichtwelle.

Zur Auswertung des Matricelementes müßte man die Eigenfunktionen des Kathodenstrahlelektrons vor und nach dem Bremsprozeß, also im besonderen auch ihren Verlauf beim Durchgang durch die Antikathode kennen. Da dies praktisch unmöglich ist, muß man das Problem weitgehend

1) A. Sommerfeld, Proc. Nat. Ac. 15. S. 393. 1929; Ann. d. Phys. [5] 11. S. 257. 1931, im folgenden mit (S) zitiert; J. R. Oppenheimer, Ztschr. f. Phys. 55. S. 725. 1929; Y. Sugiura, Phys. Rev. 34. S. 858. 1929.

2) Vgl. etwa H. Bethe, Handb. d. Phys., 2. Aufl., Bd. XXIV/1, Kap. 3, III.

idealisieren. Da beim Emissionsprozeß die schweren Kerne die Aufgabe haben, den überschüssigen Impuls aufzunehmen, und da die Impulsübertragung um so leichter stattfindet, je näher das Elektron an den Kern herankommt, so scheint es eine hinreichende Annäherung an die Wirklichkeit zu sein, wenn man die Bremsung des Elektrons am Coulombfeld eines isolierten Kernes berechnet und dabei von der Einwirkung der Elektronenhülle dieses Atoms, sowie von den Störungen durch die übrigen Atome absieht. Zur Berechnung von (2) hat man dann die Eigenfunktionen des kontinuierlichen Energiespektrums beim Keplerproblem einzuführen. In dieser Weise wurde bisher im allgemeinen das Bremsspektrum berechnet und gerade die Ergebnisse, die Sommerfeld auf Grund dieses stark idealisierten Antikathodenmodells für die Intensitätsverteilung, für die Polarisationsverhältnisse usw. erhalten hat und die meist sehr gut mit den experimentellen Befunden von Kulenkampff u. a. übereinstimmen, zeugen von der großen Leistungsfähigkeit dieses Modells.

Diesen Vorteilen gegenüber muß als Nachteil die Umständlichkeit der Rechnung angeführt werden, die durch den relativ komplizierten Bau der Eigenfunktionen des Keplerkontinuums bedingt ist. Besonders stark tritt dies natürlich in Erscheinung bei der relativistischen Durchrechnung des Bremsspektrums, wo eine strenge Auswertung der entsprechenden Matricelemente unter Verwendung der Diracfunktionen des Wasserstoffs nicht mehr möglich ist. Neben diesen mathematischen Schwierigkeiten besteht ein, wenn auch nicht schwerwiegendes Bedenken physikalischer Natur, das in der Besonderheit des Coulombfeldes bedingt ist und sich darin äußert, daß die berechnete Strahlungsintensität an der langwelligen Grenze des Spektrums (für  $\nu = 0$ ) unendlich groß wird. Der Grund dafür liegt darin, daß wegen der „großen Ausdehnung des Coulombfeldes“ auch Elektronen, welche sehr weit vom Kern vorbeifliegen, noch immer eine endliche Wahrscheinlichkeit besitzen, einen Teil ihrer Energie als Strahlung abzugeben und den überschüssigen Impuls auf den Kern zu übertragen.

Diese beiden Schwierigkeiten lassen sich, wie im folgenden gezeigt wird, vermeiden, wenn man statt der strengen Durchrechnung ein Näherungsverfahren verwendet.<sup>1)</sup> Und zwar werden für die Wellenfunktionen in (2) solche für modifizierte Ebene

1) Diese Methode wird auch in einer nach Abschluß der vorliegenden Rechnungen erschienenen Arbeit von W. Heitler (Ztschr. f. Phys. 84. S. 145. 1933) angewandt.

Wellen eingeführt, welche man aus den ungestörten ebenen Wellen des ein- und auslaufenden Elektrons durch Berücksichtigung ihrer Deformierung im Potentialfeld des bremsenden Atoms erhält. (Erste Näherung der Born-Diracschen Stoßmethode.)

Man kann diesen Rechenvorgang auch noch anders begründen: In der Diracschen Strahlungstheorie, aus der man ja auch die Formel (1) ableiten kann, nimmt man gewöhnlich die Wellenfunktion der Elektronen als bekannt an und berechnet die Störung, die an dieser Funktion durch die Kopplung mit dem Strahlungsfeld entsteht, welche in der Hamiltonfunktion durch ein Störungsglied von der Form  $\frac{e}{mc}(\mathcal{A}p)$  beschrieben wird. Man kann aber ebenso auch das Potentialglied  $V$ , welches den Einfluß des Streuzentrums auf die Elektronenbewegung gibt, als Störung ansehen und nach der Modifikation einer ebenen Elektronenwelle unter dem gleichzeitigen Einfluß der Kopplung mit dem Strahlungsfeld und der mit dem festen Potentialfeld fragen. Diese beiden Störungsglieder sind einander bis zu einem gewissen Maße gleichwertig, da das Potentialfeld lediglich die Aufgabe hat, den bei der Emission des Lichtquanten freiwerdenden Impuls aufzunehmen. Bei dieser Rechenmethode muß man dann bis zur „zweiten Näherung“ vorgehen, d. h. alle Glieder berücksichtigen, welche sowohl das eine, wie das andere Störungspotential in erster Ordnung enthalten. Man kommt auf diesem Wege zum gleichen Ergebnis wie beim früher angegebenen Verfahren, das auch im folgenden angewandt werden soll.

Es ist evident, daß diese Methode für beliebig vorgegebene Potentialfelder  $V(x, y, z)$  anwendbar ist. Wir werden sie im folgenden speziell auf die Fälle des reinen und des abgeschirmten Coulombfeldes anwenden. Es ergeben sich dabei — im ersten Falle — Resultate, die, bis auf die Nähe der kurzwelligen Grenze des Bremsspektrums, mit den von Sommerfeld auf Grund der strengen Lösungen im Coulombfeld abgeleiteten übereinstimmen.

Daß man in der Nähe der Grenze abweichende Resultate bekommt, hat seinen Grund in der Anwendung der Bornschen Methode zur Berechnung der Eigenfunktionen. Diese konvergiert bekanntlich nur dann hinreichend schnell, wenn die Geschwindigkeit des stoßenden Teilchens groß ist gegen die Geschwindigkeit eines Elektrons in der Bohrschen Bahn, wenn also — im Falle des reinen Coulombfeldes —  $\alpha Z \ll \beta$  ist, wobei  $\alpha$  die Feinstrukturkonstante  $e^2/\hbar c$  und  $\beta$  die Relativgeschwindigkeit  $v/c$  bedeutet. Da diese Bedingung im vor-



liegenden Fall für den Anfangs- und den Endzustand erfüllt sein muß, wenn man sich mit der ersten Näherung des Bornschen Verfahrens begnügen will, so sind die vorliegenden Rechnungen nur auf die Frequenzbereiche im Bremsspektrum anwendbar, die hinreichend weit von der kurzwelligen Grenze entfernt sind.

Trotz dieses Nachteiles kann die hier mitgeteilte Methode vielleicht doch von Interesse sein, in Anbetracht ihrer Einfachheit und Übersichtlichkeit. Im besonderen scheint sie für die Durchrechnung des Bremsspektrums nach der relativistischen Wellenmechanik von großem Vorteil zu sein. Da sich übrigens bei der Berechnung der Matrixelemente unter Verwendung der Diracfunktionen des Keplerkontinuums die Integrale nur dann geschlossen ausführen lassen, wenn man sich auf die Glieder niedrigster Ordnung in  $\alpha^2 Z^2$  beschränkt, während die vorliegende Methode ebenfalls im wesentlichen eine Entwicklung nach Potenzen von  $\alpha^2 Z^2$  darstellt, so ist anzunehmen, daß im relativistischen Fall beide Methoden genau zum gleichen Ergebnis führen. Wir werden auf die Erweiterung der vorliegenden Rechnungen auf diesen Fall in einer folgenden Untersuchung zurückkommen.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß man nach der hier angegebenen Methode auch die Erzeugung von Röntgenstrahlung durch Bremsung von Elektronen bei gleichzeitiger Anregung des gestoßenen Atoms behandeln kann. Man hat dann als ungestörte Wellenfunktion das Produkt aus einer ebenen Welle und der Eigenfunktion der Atomelektronen anzusetzen und als Störungspotential die Wechselwirkung des stoßenden Elektrons mit dem Kern und den Hüllenelektronen aufzufassen.

## 2. Durchführung der Rechnung für ein beliebiges Potentialfeld

Wir beginnen mit der Berechnung der gestörten Wellenfunktionen. Die ungestörten Wellenfunktionen sind die ebenen Wellen

$$(3) \quad \psi^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{U}} e^{\frac{i}{\hbar} ((\mathbf{p}\tau) - Et)};$$

dabei denken wir uns zur Vermeidung von Konvergenzschwierigkeiten vorerst die ganze Anordnung in einen Kasten vom Volumen  $U$  eingeschlossen und werden erst später zur Grenze  $U \rightarrow \infty$  übergehen. Dann ergeben sich die durch das Potentialfeld  $V(x, y, z)$  gestörten Wellenfunktionen bekanntlich in der Form

$$(4) \quad \psi = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} Et}}{\sqrt{U}} \left( e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}\tau)} + \frac{1}{U} \sum_{\mathbf{p}'} e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}'\tau)} \frac{V(\mathbf{p} - \mathbf{p}')}{E - E'} \right),$$

mit der Abkürzung:

$$(5) \quad V(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \int V(x, y, z) e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \mathbf{r})} d\mathbf{r}.$$

Die Summe in (4) ist dabei über alle im Kasten möglichen ebenen Wellen zu erstrecken.

Das Matricelement (2) für den Übergang von einem Anfangszustand  $\psi_0$  zu einem anderen Zustand  $\psi$  läßt sich unter Verwendung der Wellenfunktionen (4) sofort angeben:

$$P_{E, E_0}^{q, \mathfrak{s}} = \frac{i}{\hbar} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0 - E)t}}{U} \cdot \left( \frac{(\mathfrak{s} \mathbf{p}_0)}{E(\mathbf{p}) - E(\mathbf{p}_0 - \mathbf{q})} + \frac{(\mathfrak{s} \mathbf{p})}{E(\mathbf{p}_0) - E(\mathbf{p} + \mathbf{q})} \right) V(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p} - \mathbf{q}).$$

Dabei bedeutet  $E(\mathbf{p})$  die Energie der Welle mit dem Impulsvektor  $\mathbf{p}$ . Führt man noch zur Abkürzung für den auf das feste Potentialfeld übertragenen Impuls

$$(6) \quad \mathfrak{P} = \mathbf{p}_0 - \mathbf{p} - \mathbf{q}$$

ein, so bekommt man wegen

$$E(\mathbf{p}_0) - E(\mathbf{p}) = \hbar \nu;$$

$$(7) \quad P_{E, E_0}^{q, \mathfrak{s}} = \frac{i}{\hbar \hbar \nu} \frac{e^{-2\pi i \nu t}}{U} \left( \frac{(\mathfrak{s} \mathbf{p})}{1 - \frac{(\mathbf{v} \mathbf{n})}{c}} - \frac{(\mathfrak{s} \mathbf{p}_0)}{1 - \frac{(\mathbf{v}_0 \mathbf{n})}{c}} \right) V(\mathfrak{P}).$$

$\mathfrak{s}$  ist dabei, wie erwähnt, der Einheitsvektor in der Polarisationsrichtung,  $\mathbf{n}$  der in der Fortschrittrichtung des Lichtes.

Um von dem mit (7) gebildeten Ausdruck (1) für die Wahrscheinlichkeit eines Elementarprozesses zur Intensität der Röntgenstrahlung in der Entfernung  $R$  vom Streuzentrum überzugehen, müssen wir  $w(q, \mathfrak{s}) d\omega$  mit  $\hbar \nu$  multiplizieren und durch  $R^2 d\omega$  dividieren. Ferner wollen wir die Primärwelle so normieren, daß ihr Strom gleich 1 wird (ein Elektron tritt pro Sekunde durch den Quadratzentimeter); dies ergibt den Faktor  $U/v_0$ . Schließlich wollen wir jetzt den Grenzübergang zu unendlich großem  $U$  machen und berücksichtigen dabei, daß die Zahl der Eigenschwingungen mit einem Impuls zwischen  $p$  und  $p + dp$  und mit der Richtung des Ausbreitungsvektors innerhalb des Raumwinkels  $d\Omega$  gleich

$$\frac{U}{h^3} p^2 dp d\Omega$$

ist. Dann erhält man wegen  $|p dp| = m h |d\nu|$  als spektrale Intensität  $J_\nu(\mathfrak{s}) d\nu$ , angegeben als Energie pro Sekunde und Quadratcentimeter, den Ausdruck:

$$(8) \quad J_\nu(\mathfrak{s}) d\nu = \frac{d\nu}{R^2} \frac{2\pi e^2}{h^4 c^3} \frac{p}{p_0} \int d\Omega \left( \frac{(\mathfrak{s} \mathfrak{p})}{1 - \frac{(\mathfrak{v} \mathfrak{n})}{c}} - \frac{(\mathfrak{s} \mathfrak{p}_0)}{1 - \frac{(\mathfrak{v}_0 \mathfrak{n})}{c}} \right)^2 |V(\mathfrak{p})|^2.$$

Summiert man hier noch über zwei senkrecht zueinander stehende Polarisationsrichtungen, so ergibt sich als Gesamtintensität:

$$(8a) \quad J_\nu d\nu = \frac{d\nu}{R^2} \frac{2\pi e^2}{h^4 c^3} \frac{p}{p_0} \int d\Omega \left( \frac{[\mathfrak{n} \mathfrak{p}]}{1 - \frac{(\mathfrak{v} \mathfrak{n})}{c}} - \frac{[\mathfrak{n} \mathfrak{p}_0]}{1 - \frac{(\mathfrak{v}_0 \mathfrak{n})}{c}} \right)^2 |V(\mathfrak{p})|^2.$$

In ähnlicher Weise kann man auch Fragen nach der Wahrscheinlichkeit beantworten, daß etwa das Elektron nach dem Prozeß in einer bestimmten Richtung mit einer bestimmten Energie davonfliegt usw.

Zur Ausführung der verbleibenden Integration in (8), bzw. (8a) ist nun die Kenntnis der Winkelabhängigkeit des Gliedes  $|V(\mathfrak{p})|^2$ , das den Charakter eines Atomformfaktors für unelastische Streuung besitzt, erforderlich. Wir wollen hier die Rechnungen weiter führen für die beiden Fälle des reinen und des exponentiell abgeschirmten Coulombfeldes. In diesen Fällen lassen sich alle auftretenden Integrationen leicht ausführen.

### 3. Bremspektrum bei Streuung am reinen Coulombfeld

Wir wollen in diesem Abschnitt die Ausdrücke (8) und (8a) für den Fall der Potentialfunktion

$$(9) \quad V(x, y, z) = -\frac{Ze^2}{r}$$

auswerten. Hier ergibt sich bekanntlich für das Störungsintegral (5):

$$(10) \quad V(\mathfrak{p}) = -\frac{Ze^2 h^2}{\pi \mathfrak{p}^2}.$$

Damit geht (8) über in

$$(11) \quad J_\nu(\mathfrak{s}) d\nu = \frac{d\nu}{R^2} \frac{2Ze^2}{\pi c^3} \frac{p}{p_0} \int \frac{d\Omega}{\mathfrak{p}^4} \left( \frac{(\mathfrak{s} \mathfrak{p})}{1 - \frac{(\mathfrak{v} \mathfrak{n})}{c}} - \frac{(\mathfrak{s} \mathfrak{p}_0)}{1 - \frac{(\mathfrak{v}_0 \mathfrak{n})}{c}} \right)^2,$$

und einen entsprechenden Ausdruck erhält man für (8a).

Die Integration über die Richtungen von  $\mathfrak{p}$  läßt sich elementar ausführen. Läßt man dabei alle Glieder relativisti-

scher Größenordnung fort, so erhält man als Intensität der unpolarisierten Strahlung in Abhängigkeit Winkel  $\Theta$  zwischen Primärstrahlrichtung des Elektrons und Beobachtungsrichtung des Röntgenquants nach (8a):

$$(12) \quad \left\{ J_{\nu} d\nu = \frac{d\nu}{R^2} \frac{4Z^2 e^6}{c^3} \frac{p}{p_0^3} \cdot \left( \left( \frac{p_0^3 + p^3}{2p_0 p} \log \frac{p_0 + p}{p_0 - p} - 1 \right) (1 + 2\beta \cos \Theta) + \frac{\sin^2 \Theta}{2} \left( \frac{p_0^2 - 3p^2}{2p_0 p} \log \frac{p_0 + p}{p_0 - p} + 3 \right) (1 + 4\beta \cos \Theta) \right) \right\}.$$

Als Beitrag der beiden Polarisationskomponenten  $\parallel$  und  $\perp$  zur Primärstrahlrichtung folgt aus (8) für senkrechte Beobachtung ( $\Theta = 90^\circ$ )

$$(13a) \quad J_{\nu}^{\parallel} d\nu = \frac{d\nu}{R^2} \frac{4Z^2 e^6}{c^3} \frac{p}{p_0^3} \left( \frac{p_0^3 - p^3}{2p_0 p} \log \frac{p_0 + p}{p_0 - p} + 1 \right),$$

$$(13b) \quad J_{\nu}^{\perp} d\nu = \frac{d\nu}{R^2} \frac{4Z^2 e^6}{c^3} \frac{p}{p_0^3} \frac{1}{2} \left( \frac{p_0^3 + p^3}{2p_0 p} \log \frac{p_0 + p}{p_0 - p} - 1 \right).$$

Ein Vergleich dieser Formeln mit den entsprechenden, von Sommerfeld gefundenen Ausdrücken [vgl. (S) §§ 11 u. 14] zeigt vollständige Übereinstimmung hinsichtlich der Winkelabhängigkeit der Röntgenstrahlintensität. Die Ausdrücke (12) und (13) unterscheiden sich von den Sommerfeldschen nur um den Faktor

$$(14) \quad \frac{\left( 1 - e^{-\frac{2\pi\alpha Z}{\beta}} \right) \left( e^{\frac{2\pi\alpha Z}{\beta_0}} - 1 \right)}{\frac{2\pi\alpha Z}{\beta} \frac{2\pi\alpha Z}{\beta_0}}.$$

Dieser Faktor ist für alle die Geschwindigkeiten  $v$  und  $v_0$ , sowie für die Werte von  $Z$ , für die die Bedingung  $\alpha Z \ll \beta$  für die Brauchbarkeit des Bornschen Näherungsverfahrens erfüllt ist, annähernd gleich 1. In diesem Fall stimmen die hier gefundenen Formeln mit den entsprechenden Formeln von Sommerfeld vollinhaltlich überein.

Sobald man sich jedoch der kurzwelligen Grenze des Bremsspektrums nähert, also für  $\beta \rightarrow 0$ , wird  $\alpha Z/\beta$  sehr groß, und der Ausdruck (14) geht, sofern auch weiterhin  $\alpha Z \ll \beta_0$  ist, wie  $\beta/2\pi\alpha Z$  gegen Null. Dies hat unter anderem zur Folge, daß man bei Extrapolation der Formeln (12) und (13) bis zur kurzwelligen Grenze für die Intensität an dieser Stelle den Wert 0 erhält, während nach Sommerfeld die Strahlungsintensität bis zur Grenze einen endlichen Wert behält.

Für die gesamte, im Frequenzintervall  $d\nu$  ausgestrahlte Energie ergibt sich aus (12) durch Integration über alle Strahlrichtungen

$$(15) \quad \int J_\nu d\nu R^2 d\omega = d\nu \frac{32\pi}{3} \frac{Z^2 e^6}{c^3} \frac{1}{p_0^2} \log \frac{p_0 + p}{p_0 - p}.$$

An dieser Formel sieht man unmittelbar das Verschwinden der Intensität an der kurzwelligen Grenze des Spektrums und das logarithmische Unendlichwerden an der langwelligen Seite.

Da sich ferner die hier gefundenen Formeln von denen von Sommerfeld nur um den richtungsunabhängigen Faktor (14) unterscheiden, ergeben sich aus ihnen natürlich alle in (S) abgeleiteten Resultate über das Depolarisationsverhältnis  $D = J_\nu^\perp / J_\nu^\parallel$ , sowie über die „Voreilung“, also über den Winkel  $\Theta_{\max}$ , unter dem die größte Intensität zu beobachten ist.

#### 4. Bremspektrum bei Streuung an einem abgeschirmten Coulombfeld

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, welchen Einfluß auf die Bremsstrahlung die Abschirmung des Kernfeldes durch die Elektronenhülle des bremsenden Atoms besitzt. Dabei wollen wir die Fälle ausschließen, daß dieses Atom beim Bremsprozeß selbst einen Teil der Energie des gebremsten Elektrons übernimmt. Schließen wir also die Möglichkeit einer Anregung des bremsenden Atoms aus, so können wir die Wirkung von Kern und Elektronenhülle auf das Kathodenstrahlelektron durch ein skalares Potential beschreiben. Aus mathematischen Gründen wollen wir hier für dieses Potential den Ansatz machen:

$$(16) \quad V(x, y, z) = -\frac{e^2 Z}{r} e^{-\frac{r}{a}}.$$

Dann lassen sich alle auftretenden Integrale geschlossen ausführen und man erhält so einen rohen Überblick über den Einfluß dieser Abschirmung auf die Intensitätsverteilung im Bremspektrum.

Ferner wollen wir hier zur Vereinfachung von der Retardierung absehen, also nicht nur die in  $v/c$  quadratischen Glieder, sondern auch die darin linearen Glieder vernachlässigen, welche in (12) die Voreilung gaben. Dann lautet, wenn wir in Analogie zu (6)

$$(17) \quad \mathfrak{P}_0 = p_0 - p$$

setzen, die allgemeine Formel (8) für die spektrale Intensitätsverteilung einer Polarisationskomponente:

$$(18) \quad J_\nu(\mathfrak{z}) d\nu = \frac{d\nu}{R^2} \frac{2\pi e^2}{h^4 c^3} \frac{p}{p_0} \int d\Omega (\mathfrak{z} \mathfrak{P}_0)^2 |V(\mathfrak{P}_0)|^2.$$

Sie hängt also von der Beobachtungsrichtung nur insofern noch ab, als die Polarisationsrichtung  $\mathfrak{z}$  auf  $n$  senkrecht steht. Anstatt (8a) ergibt sich:

$$(18a) \quad J_\nu d\nu = \frac{d\nu}{R^2} \frac{2\pi e^2}{h^4 c^3} \frac{p}{p_0} \int d\Omega [n \mathfrak{P}_0]^2 |V(\mathfrak{P}_0)|^2.$$

Mit dem speziellen Ansatz (16) lautet nun das Störungsintegral (5)

$$(19) \quad V(\mathfrak{P}_0) = - \frac{Z e^2 \hbar^2}{\pi \left( \mathfrak{P}_0^2 + \frac{\hbar^2}{a^2} \right)}.$$

Daraus ergibt sich nach (18) die Intensität der unpolarisierten Bremsstrahlung:

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} J_\nu d\nu &= \frac{d\nu}{R^2} \frac{4 Z^2 e^6}{c^3} \frac{p}{p_0} \left\{ \frac{p_0^2 + p^2 + \frac{\hbar^2}{a^2}}{4 p_0 p} \log \frac{(p_0 + p)^2 + \frac{\hbar^2}{a^2}}{(p_0 - p)^2 + \frac{\hbar^2}{a^2}} \right. \\ &\quad - 1 + \frac{\sin^2 \Theta}{2} \left[ \frac{p_0^2 - 3p^2 - 3 \frac{\hbar^2}{a^2}}{4 p_0 p} \log \frac{(p_0 + p)^2 + \frac{\hbar^2}{a^2}}{(p_0 - p)^2 + \frac{\hbar^2}{a^2}} \right. \\ &\quad \left. \left. + 3 - \frac{4 p_0^2 \frac{\hbar^2}{a^2}}{\left( p_0^2 + p^2 + \frac{\hbar^2}{a^2} \right)^2 - 4 p_0^2 p^2} \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Analog ergeben sich die den Formeln (13a) und (13b) entsprechenden Ausdrücke für die einzelnen Polarisationskomponenten.

Als wesentlichster Unterschied gegenüber der Formel (12) im Fall des reinen Coulombfeldes, in die (20) natürlich für  $\lim a \rightarrow \infty$  übergeht, ist anzuführen, daß hier auch bei Annäherung an die langwellige Grenze des Spektrums, also für  $p \rightarrow p_0$ , die Strahlungsintensität endlich bleibt. Man sieht dies wieder klar an dem Ausdruck für die gesamte, in das Frequenzintervall  $d\nu$  entfallende, emittierte Energie:

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \int J_\nu d\nu R^2 d\omega &= d\nu \frac{32\pi Z^2 e^6}{3 c^3} \frac{1}{p_0^2} \left\{ \frac{1}{2} \log \frac{(p_0 + p)^2 + \frac{\hbar^2}{a^2}}{(p_0 - p)^2 + \frac{\hbar^2}{a^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2 p_0 p \frac{\hbar^2}{a^2}}{\left( p_0^2 + p^2 + \frac{\hbar^2}{a^2} \right)^2 - 4 p_0^2 p^2} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Dieses Endlichbleiben ermöglicht uns, die gesamte, überhaupt in Strahlung umgewandelte Energie anzugeben und damit einen Ausdruck für den Energieverlust des Kathodenstrahl-elektrons durch Strahlung zu finden. Zunächst gibt

$$(22) \quad J = \int_0^{\nu_0} d\nu \int J, R^2 d\omega \quad \left( \nu_0 = \frac{p_0^2}{2m\hbar} \right)$$

die gesamte, beim Bremsprozeß emittierte Energie. Führt man statt  $\nu$  den Impuls  $p$  als Integrationsveränderliche ein, so läßt sich das Integral elementar ausführen und ergibt:

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} J &= \frac{32\pi Z^2 e^6}{3m c^3 \hbar} \left\{ 1 + 2 \left( \frac{\hbar}{2a p_0} \right)^2 \log \left( 1 + \left( \frac{2a p_0}{\hbar} \right)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3\hbar}{2a p_0} \arctg \frac{2a p_0}{\hbar} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Es ist bemerkenswert, daß dieser Ausdruck auch beim Grenzübergang  $a \rightarrow \infty$  (Übergang zum Fall des reinen Coulomb-feldes) endlich bleibt und den Wert

$$(24) \quad J = \frac{32\pi Z^2 e^6}{3m c^3 \hbar}.$$

annimmt.

Zur Ableitung der Formeln (23) und (24) ist zu bemerken, daß wir bei der Integration über das ganze Spektrum die Gültigkeit von (20) für den ganzen Spektralbereich, also auch bis zur kurzwelligen Grenze angenommen haben. Nun wurde bereits oben ausgeführt, daß in der Nähe der Energie die Voraussetzungen für die Gültigkeit des hier verwendeten Näherungsverfahrens nicht mehr erfüllt sind. Dies zeigte sich im Fall des reinen Coulombfeldes, wo sich die hier errechneten Formeln von denen von Sommerfeld um den Faktor (14) unterscheiden. Um einen ähnlich gebauten Faktor dürfte sich wohl auch die Formel (20) von der entsprechenden unterscheiden, welche man bei der Durchrechnung des Problems auf Grund der strengen Lösungen der Wellengleichung mit dem Potential (16) finden würde. Da der Faktor (14) stets kleiner als 1 ist, so darf man wohl annehmen, daß auch im vorliegenden Fall des abgeschirmten Coulombfeldes die Intensität (20) und damit auch die Gesamtintensität (23) bzw. (24) unter dem richtigen Wert liegen. Die Größe der Korrektur, die man aus diesem Grunde an den obigen Formeln anzubringen hat, hängt sicher von der Größe der Kernladungszahl  $Z$  und der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  ab, sie wird um so kleiner sein, je kleiner  $Z$  und je größer  $v_0$  ist.



Auf Grund von (24) läßt sich nun der Energieverlust eines Kathodenstrahlelektrons durch Ausstrahlung bei der Bremsung an der Antikathode angeben. Da  $J$  die gesamte, vom bremsenden Atom pro Sekunde ausgehende Strahlungsenergie bedeutet, wenn primär ein Strom von einem Elektron pro Quadratcentimeter und Sekunde besteht, so ist der Energieverlust eines solchen Elektrons beim Durchtritt durch eine Schicht der Antikathode von der Dicke  $dx$  gleich

$$(25) \quad -dE = \frac{32\pi Z^2 e^6}{3mc^4 h} N dx$$

wenn  $N$  die Anzahl Atome pro Kubikzentimeter bedeutet. Es ist bemerkenswert, daß Kramers<sup>1)</sup> für den gleichen Energieverlust auf Grund der klassischen Elektrodynamik unter Heranziehung des Korrespondenzprinzips eine Formel gefunden hat, welche sich von (25) nur um den Zahlenfaktor

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 0,90 \text{ unterscheidet.}$$

Der Formel (25) wollen wir, um eine Vorstellung von der Größenordnung dieses Energieverlustes zu bekommen, den Ausdruck gegenüberstellen, den Bethe<sup>2)</sup> für die Bremsung eines Elektrons infolge der unelastischen Stöße beim Durchgang durch Materie gefunden hat. Für den Durchtritt durch ein Wasserstoffgas lautet sie:

$$(26) \quad -dE = \frac{4\pi e^4}{mv^2} N dx \log \frac{2\beta^2}{ka},$$

wobei  $k$  eine Konstante von der Größenordnung 1 ist. Sieht man vom Logarithmus in (26) ab, der ebenfalls von der Ordnung 1 ist, so findet man, daß der Energieverlust des stoßenden Elektrons durch Strahlung rund um den Faktor  $\alpha\beta^2$  kleiner ist als der durch Anregung des gestoßenen Atoms. Für die Bremsung eines Elektrons spielen die Energieverluste durch Strahlung eine verschwindend kleine Rolle.

1) H. A. Kramers, *Phil. Mag.* **46**. S. 836. 1923.

2) H. Bethe, *Ann. d. Phys.* (5) **5**. S. 325. 1930.

Berlin, Institut für theoretische Physik an der Technischen Hochschule.

(Eingegangen 21. August 1933)

## **Untersuchung des Systems Au-Cu durch Messung des Widerstandes in tiefen Temperaturen**

**Von V. Pospíšil**

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt)

(Mit 5 Figuren)

Es wird das Gold-Kupfersystem an einer Reihe dicht beieinanderliegender Legierungen verschiedener Konzentration im abgeschreckten und im getemperten Zustande untersucht, und zwar mit Hilfe des Verhältnisses der elektrischen Widerstände bei  $-195$  und  $-252,4^{\circ}\text{C}$  zu dem Widerstand bei  $0^{\circ}\text{C}$ . Die Resultate sind tabellarisch und graphisch dargestellt und mit den Ergebnissen anderer Forschungsarbeiten verglichen.

### **1. Der Zweck dieser Untersuchungen**

Die Legierungen der isomorphen Metalle Gold und Kupfer waren in letzter Zeit Gegenstand mehrerer Untersuchungen. Nachdem von N. Kurnakov und S. Zemczuzny<sup>1)</sup> 1907 gegenüber der älteren fälschlichen Auffassung festgestellt wurde, daß die beiden Metalle im abgeschreckten Zustand eine ununterbrochene Reihe von Mischkristallen bilden, wurde von denselben Forschern gemeinsam mit Zasedatelev<sup>2)</sup> 1916 entdeckt, daß bei langsamem Abkühlen in den Legierungen, in denen die Atommengen der beiden Metalle nahe im Verhältnisse 1:3 und 1:1 stehen, sich die intermetallischen Verbindungen  $\text{AuCu}_3$  und  $\text{AuCu}$  ausbilden. Die damit zusammenhängenden Gitterumwandlungen wurden von C. H. Johanson und J. O. Linde<sup>3)</sup> 1925–1927, von W. Gorsky<sup>4)</sup> 1928, von U. Dehlinger und L. Graf<sup>5)</sup> 1930 und von G. Sachs und J. Weerts<sup>6)</sup> 1931 und kürzlich von M. Le Blanc und

1) N. Kurnakov u. S. Zemczuzny, Ztschr. f. anorg. Chem. **54**. S. 158. 1907.

2) N. Kurnakov, S. Zemczuzny u. M. Zasedatelev, Journ. of the Inst. of Metals **155**. S. 305. 1916.

3) C. H. Johanson u. J. O. Linde, Ann. d. Phys. **78**. S. 439. 1925 und **82**. S. 449. 1927.

4) W. Gorsky, Ztschr. f. Phys. **50**. S. 68. 1928.

5) U. Dehlinger u. L. Graf, Ztschr. f. Phys. **64**. S. 359. 1930.

6) G. Sachs u. J. Weerts, Ztschr. f. Phys. **67**. S. 507. 1931.

G. Wehner<sup>1)</sup> röntgenographisch untersucht. Die letzteren Forscher, deren Messungen erst nach Abschluß dieser Arbeit veröffentlicht wurden, haben auch in ausgedehntem Maße Widerstandsisothermen zur Analyse der Au-Cu-Legierungen benutzt.

Umfangreiche Untersuchungen über das Zustandsdiagramm des Systems Au-Cu mit Hilfe der elektrischen Leitfähigkeit und der thermischen Ausdehnung wurden schon vorher von G. Grube und seinen Mitarbeitern G. Schönmann, F. Vaupel und W. Weber<sup>2)</sup> 1927—1930 an einer Reihe dicht aufeinanderfolgender Legierungen mit 10—100% Goldgehalt unternommen. Von Grube wurden diese Legierungen an das Kältelaboratorium der Phys.-Techn. Reichsanstalt weitergegeben, damit dort die Leitfähigkeitsmessungen, die im Grubescen Institut zwischen 20—460° C stattfanden, noch in tieferen Temperaturen durchgeführt werden konnten. Mit dieser Arbeit wurde der Verf. betraut.

Sechs andere Proben von AuCu-Legierungen mit 24 bis 26 Atom-Prozent Au, wurden 1930 von H. J. Seemann<sup>3)</sup> auf ihre Leitfähigkeit in tiefen Temperaturen untersucht, und die Leitfähigkeit von zweien dieser Legierungen im getemperten und einer mit 50,3 Atom-Prozent Au im abgeschreckten Zustande wurde von W. Meißner 1930<sup>4)</sup> im flüssigen Helium gemessen. Ihre Resultate werden weiter mitberücksichtigt.

## 2. Die Arbeitsmethode

Die Arbeitsmethode geht von der Tatsache aus, daß die intermetallischen Verbindungen sich ähnlich wie die reinen Metalle verhalten, nämlich kleine spezifische Widerstände und große Temperaturwiderstandskoeffizienten besitzen. Den Werten des spezifischen Widerstandes wurde, da sie durch Poren u. dgl. beeinflußt werden, weniger Gewicht beigelegt, als der von derartigen Einflüssen unabhängigen Temperaturabhängigkeit des Widerstandes. Statt der Temperaturkoeffizienten  $\alpha$  bei einer bestimmten Temperatur wurden die Verhältnisse der Widerstände  $r = \frac{\varrho}{\varrho_0}$  bestimmt. Beide sind ja verknüpft durch die Beziehung

$$\varrho = \varrho_0 \left( 1 + \int_{T_0}^T \alpha dT \right).$$

1) M. Le Blanc u. G. Wehner, *Ann. d. Phys.* [5] **14**. S. 481. 1932.

2) G. Grube, G. Schönmann, F. Vaupel u. W. Weber, *Ztschr. f. anorg. u. allg. Chem.* **201**. S. 41. 1931.

3) H. J. Seemann, *Ztschr. f. Phys.* **62**. S. 824. 1930.

4) W. Meißner, *Ztschr. f. Phys.* **64**. S. 581. 1930.

Statt  $\rho/\rho_0$  konnte mit hinreichender Genauigkeit  $R/R_0$  gesetzt werden, da die thermische Ausdehnung zu vernachlässigen war.

Die Widerstandsmessung erfolgte mit einem Kompensationsapparat nach Diesselhorst.

Die untersuchten Legierungsproben, im ganzen 59 Stück mit 10—100 Atom-Prozent Au, hatten die Form von etwa 6 cm langen und 4 mm dicken Stäbchen. Zwei Proben, eine mit 25 und eine mit 50 Atom-Prozent Au waren doppelt vorhanden.

Die Arbeit zerfiel in vier Hauptteile:

I. *Thermische Vorbehandlung der Legierungen* zur Erzeugung der regellosen Verteilung der Gold- und Kupferatome in dem kubischen Gitter der Mischkristalle. Zu diesem Zwecke wurden die mechanisch gereinigten Legierungen in gut evakuierte Glasröhrchen eingeschmolzen und im elektrischen Ofen auf 500° C erhitzt, und dann im Eiswasser abgeschreckt, wodurch dieser Zustand bei allen Konzentrationen auch für die gewöhnlichen und tiefen Temperaturen erhalten bleibt.

II. *Messung des Widerstandes der Legierungen im Mischkristallzustand.* Die Legierungen wurden zu 20 Stück in einem weiter unten beschriebenen Apparat in Serie geschaltet, eingespannt und mit einem Strom von etwa 2 Amp. belastet. Die Spannung zwischen zwei etwa 5 cm entfernten Stellen auf jedem Stäbchen wurde dann mit der Spannung an einem von demselben Strom durchflossenen Normalwiderstand von 0,001 Ohm verglichen. Dies geschah nahe bei 0° C im eisgekühlten Petroleumbad, in siedendem Stickstoff, dann zur Kontrolle nochmals bei 0°, weiter in siedendem Wasserstoff und wiederum bei 0°, jede Messungsreihe zweimal. Die Temperatur des Petroleumbades und die des Stickstoffs wurde mit einem Platinwiderstandsthermometer gemessen, die des Wasserstoffs nach dem Barometerstande berechnet. Alle gemessenen Widerstände wurden mit dem aus den Messungen bekannten Temperaturkoeffizienten auf 0,00° C, auf -195,00° und auf die Temperatur des siedenden Wasserstoffs bei Normaldruck (20,43 abs.) reduziert. Sodann wurden die  $r$ -Werte berechnet.

III. *Thermische Vorbehandlung zur Herstellung der intermetallischen Verbindungen.* Die in evakuierten Glasröhrchen eingeschmolzenen Legierungen wurden im Verlauf einer Woche von 400 auf 300° abgekühlt und weiter in einigen Stunden auf Zimmertemperatur. Über den zeitlichen Temperaturverlauf vgl. noch weiter Fig. 5.

IV. *Messung des Widerstandes der getemperten Legierungen.* Sie erfolgte wieder auf die unter II angegebene Weise.

Außer den  $r$ -Werten wurden noch mit einer besonderen Einrichtung (wieder nach der Kompensationsmethode) die spezifischen Widerstände bei  $0^\circ \text{C}$  gemessen, um engeren Anschluß an die Arbeit von Grube usw. zu erzielen.

### 3. Zur praktischen Ausführung der Messungen

Besondere Aufmerksamkeit verlangte die Anbringung der Potentialdrähte, da wegen der Wärmeausdehnung in tiefer Temperatur leicht ein Verschieben der Potentialabnehmestellen eintritt. Alle Anschlüsse wurden mit Hilfe von federnd gegen das Stäbchen gedrückten Kontaktstücken möglichst einfach

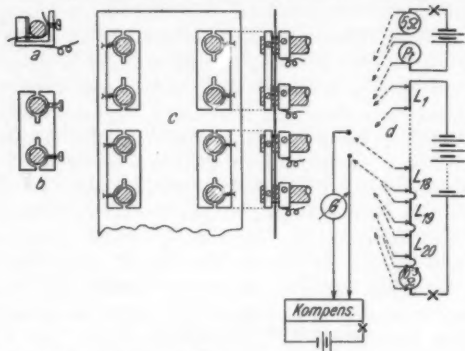


Fig. 1. Zur Praktik der Meßeinrichtungen. Apparatschema

hergestellt, wie in Fig. 1 skizziert ist. Die Potentialdrähte wurden an kleine federnde Messingstücke gelötet, die eine gegen das Stäbchen drückende Stahlschneide und ihr gegenüber eine durch einen Zelluloidstreifen isolierte Schraube besaßen (Fig. 1 a). Beim Anziehen der Schraube wirkt das Messingstück als Feder und gewährleistet stets guten Kontakt der Schneide mit dem Versuchsstäbchen. Den Stromübergang zwischen zwei Stäbchen vermittelte ein mit zwei Schrauben und zwei geschlitzten Löchern versehenes federndes Messingstück (Fig. 1 b). Diese Stromklemmen waren von den Potentialklemmen durch ein Zelluloidblatt getrennt, welches gleichzeitig auch alle 20 Stäbchen zusammenhielt, so daß die Legierungsdrähte mit den zwei seitlichen Zelluloidblättern ein ziemlich festes Gerüst bildeten.

### 4. Die Meßergebnisse

Die Resultate für die abgeschreckten Legierungen enthält Tab. 1, diejenigen für die getemperten Legierungen Tab. 2.

Tabelle 1

Die  $r$ -Werte und die spezifischen Widerstände der AuCu-Legierungen im abgeschreckten Znstande ( $\alpha$ -Mischkristalle)

Legier.- Nr.	Gew.-% Au	Atom-% Au	Spezif. Gewicht	$r_N = \frac{R_{-195}}{R_0}$	$r_H = \frac{R_{-252,4}}{R_0}$	Spezifische Widerstände in $10^{-6} \Omega \text{cm}$ bei $0^\circ \text{C}$
0	0,0	0,00	8,94	0,146 <sup>*)</sup>	0,0006 <sup>*)</sup>	—
1	25,6	10,00	10,60	7742	7239	6,27
2	35,4	15,01	10,84	8231	7829	8,21
3	39,7	17,51	11,18	8412	8044	9,28
4	42,0	18,93	11,41	8497	8134	9,65
5	43,7	20,01	11,50	8521	8170	10,33
5 a	45,3	21,07	11,69	8580	8227	10,32
6	46,0	21,55	11,71	8666	8350	10,81
7	48,0	22,93	11,81	8624	8276	10,86
8	49,6	24,08	12,05	8656	8324	11,16
9	50,8	24,98	12,00	8685	8369	11,49
9 a	50,8	24,98	12,10	8654	8313	11,22
10	52,2	26,04	11,97	8668	8333	11,85
11	54,2	27,61	12,34	8697	8371	11,92
12	55,9	29,01	12,45	8754	8434	12,36
13	57,0	29,94	12,43	8753	8427	12,97
14	59,3	31,97	12,78	8774	8455	13,18
15	60,5	33,05	13,07	8773	8453	12,72
16	61,4	33,90	13,00	8765	8417	13,19
17	62,6	35,05	13,16	8773	8427	13,18
18	63,6	36,03	13,00	8779	8442	13,86
19	64,7	37,14	12,93	8815	8485	13,73
20	65,6	38,07	13,42	8827	8489	13,30
21	66,5	39,02	13,29	8842	8508	14,08
22	67,4	39,99	13,60	8835	8503	13,40
23	68,4	41,10	13,76	8844	8508	13,37
24	69,7	42,58	14,01	8839	8488	13,39
25	71,0	44,11	14,18	8872	8565	14,13
26	72,6	46,07	14,37	8861	8554	13,93
27	73,8	47,59	14,62	8870	8559	14,08
28	74,9	49,03	14,71	8879	8572	13,95
29	75,6	49,97	14,77	8871	8551	14,37
29 a	75,6	49,97	14,84	8864	8549	14,03
30	76,4	51,07	14,63	8875	8567	14,11
31	77,5	52,61	14,88	8838	8504	13,78
32	78,5	54,06	15,15	8822	8488	13,74
33	79,2	55,11	15,32	8820	8488	14,10
34	80,5	57,09	15,48	8747	8381	14,49
35	81,7	59,00	15,73	8790	8436	13,37
36	82,4	60,15	15,85	8717	8333	13,23

\*) Nach W. Meißner u. B. Voigt, aus zwei Proben gemittelt.

Tabelle 1 (Fortsetzung)

Legier.- Nr.	Gew.-% Au	Atom-% Au	Spezif. Gewicht	$r_N = \frac{R_{-195}}{R_0}$	$r_H = \frac{R_{-252,4}}{R_0}$	Spezifische Widerstände in $10^{-8} \Omega \text{cm}$ bei $0^\circ \text{C}$
37	83,3	61,66	15,94	0,8760	0,8384	13,09
38	84,2	63,21	16,17	8685	8280	12,80
39	84,7	64,09	16,17	8666	8269	12,85
40	85,3	65,16	16,31	8658	8266	12,61
41	86,4	67,19	16,45	8622	8208	12,40
42	87,4	69,10	16,67	8554	8126	11,97
43	88,4	71,07	16,80	8472	8031	11,58
44	89,2	72,70	16,87	8468	8014	11,47
45	89,9	74,16	16,96	8409	7934	11,14
46	90,4	75,22	17,03	8379	7890	10,99
47	90,8	76,09	17,20	8328	7825	10,52
48	91,3	77,19	17,26	8331	7853	10,22
49	92,0	78,76	17,49	8170	7636	9,47
50	92,6	80,14	17,64	8129	7580	9,18
51	93,1	81,31	17,64	8140	7591	9,15
52	93,7	82,74	17,71	8053	7491	8,90
53	94,6	84,96	17,89	7907	7291	8,24
54	96,6	90,16	18,35	7297	6508	6,16
55	98,3	94,91	18,85	6068	4902	4,20
56	100,0	100,00	19,26	2295	0161	2,07

Tabelle 2

Die  $r$ -Werte und die spezifischen Widerstände der AuCu-Legierungen  
im getemperten Zustande

Legier.- Nr.	Atom-% Au	$r_N = \frac{R_{-195}}{R_0}$	$r_H = \frac{R_{-252,4}}{R_0}$	Spezifische Widerstände in $10^{-8} \Omega \text{cm}$	
				bei $0^\circ \text{C}$	bei $20^\circ \text{C}$ nach Grube usw.
0	0,00	—	—	—	1,68
1	10,00	0,7741	0,7248	6,22	6,50
2	15,01	8245	7839	8,27	8,43
3	17,51	8404	8035	9,39	9,65
4	18,93	8345	7928	9,78	9,35
5	20,01	7961	7392	9,77	9,03
5 a	21,07	7089	6340	7,35	6,86
6	21,55	7906	7362	9,23	—
7	22,93	6140	5146	6,00	5,70
8	24,08	4891	3588	4,64	4,38
9	24,98	5061	3808	4,86	4,14
9 a	24,98	4537	3150	4,34	—
10	26,04	4777	3461	4,71	4,12
11	27,61	5786	4713	5,58	4,85
12	29,01	6602	5732	6,78	6,65



Tabelle 2 (Fortsetzung)

Legier.- Nr.	Atom-% Au	$r_N = \frac{R_{-195}}{R_0}$	$r_H = \frac{R_{-252,4}}{R_0}$	Spezifische Widerstände in $10^{-6} \Omega \text{cm}$	
				bei 0° C	bei 20° C nach Grube usw.
13	20,94	0,7175	0,6441	8,21	7,80
14	31,97	7953	7403	10,66	8,57
15	33,05	8173	7658	11,07	9,57
16	33,90	8394	7946	12,27	10,78
17	35,05	8519	8099	12,58	11,12
18	36,03	8626	8247	13,48	11,43
19	37,14	8646	8275	13,80	11,72
20	38,07	8386	7958	11,61	10,19
21	39,02	8164	7684	10,95	9,50
22	39,99	8177	7702	10,53	9,20
23	41,10	7987	7468	9,60	8,51
24	42,58	7608	6988	8,55	7,75
25	44,11	6867	5958	6,91	7,13
26	46,07	6866	6057	6,42	6,29
27	47,59	4815	3375	4,25	4,46
28	49,03	4889	3464	4,28	4,28
29	49,97	4979	3600	4,58	3,79
29 a	49,97	4071	2424	3,83	—
30	51,07	4597	3095	4,12	4,14
31	52,61	5386	4088	4,79	4,86
32	54,06	6066	4964	5,49	5,20
33	55,11	6695	5800	6,82	6,06
34	57,09	7251	6495	7,36	7,22
35	59,00	7713	7076	8,69	8,25
36	60,15	7899	7315	9,38	9,05
37	61,66	7984	7422	9,65	9,13
38	63,21	8582	8151	12,91	10,67
39	64,09	8574	8142	12,90	10,74
40	65,16	8611	8193	12,76	12,06
41	67,19	8601	8180	12,53	12,42
42	69,10	8571	8144	12,10	12,35
43	71,07	8527	8090	11,66	12,17
44	72,70	8517	8074	11,50	12,02
45	74,16	8476	8022	11,15	11,95
46	75,22	8439	7976	10,95	11,72
47	76,09	8376	7895	10,46	11,27
48	77,19	8348	7860	10,28	11,04
49	78,76	8206	7677	9,45	—
50	80,14	8138	7589	9,01	9,41
51	81,31	8145	7597	9,13	9,56
52	82,74	8082	7517	8,76	9,21
53	84,96	7932	7318	8,20	8,58
54	90,16	7300	6498	6,14	6,38
55	94,91	6082	4908	4,17	4,37
56	100,00	2295	0179	2,08	2,22

Die  $r$ -Werte für reines Kupfer, die nullte Legierung, sind der Arbeit von W. Meißner und B. Voigt<sup>1)</sup> entnommen. Die in der ersten Spalte der Tabelle angegebenen Gewichtsprocente Au sind von der Deutschen Gold- und Silber-Scheideanstalt, Zweigniederlassung Pforzheim, angegeben, die die Legierungen herstellte. Diese Werte sind in der folgenden Spalte auf Atom-Prozente Au umgerechnet. Die in der 4. Spalte angegebenen spezifischen Gewichte der Legierungen sind durch Wägung im Petroleum ermittelt worden.

Die folgenden zwei Spalten der  $r$ -Werte bei  $-195$  und  $-252^{\circ}\text{C}$  enthalten das Hauptergebnis der Arbeit, das sich am besten in der graphischen Darstellung in Fig. 2 überblicken läßt.

Die beiden oberen, schwach ausgezogenen Kurven, die „ $r$ -Isothermen“ I und II, enthalten die  $r_N$ - und die  $r_H$ -Werte für die Legierungen im abgeschreckten Zustand. Diese Kurven entsprechen durchaus dem Widerstandsverlauf für eine ununterbrochene Reihe von Mischkristallen. Die Kristallite der abgeschreckten Legierungen besitzen nach den röntgenoskopischen Untersuchungen ein kubisches, flächenzentriertes Gitter, in dem die Atome Au oder Cu beliebige Gitterpunkte besetzen. Die Kristalle mit dieser statistisch ungeordneten Atomanordnung bezeichnen Grube usw. als  $\alpha$ -Mischkristalle.

Die zwei stark gezeichneten  $r$ -Isothermen III und IV geben die  $r_N$ - und  $r_H$ -Werte der getemperten Legierungen wieder. Sie zeigen zwei tiefe und scharfe Minima bei 25 bzw. 50 Atom-Prozent Au, die der Ausbildung der intermetallischen Verbindungen  $\text{AuCu}_3$  und  $\text{AuCu}$  zuzuschreiben sind. Die Kristalle der Verbindung  $\text{AuCu}_3$ , sind nach Johanson und Linde<sup>2)</sup> ebenfalls wie die  $\alpha$ -Mischkristalle kubisch flächenzentriert, aber ihre Gitterkonstante ist etwas kleiner als bei letzteren.<sup>3)</sup> Während des Temperns ist die statistisch ungeordnete Verteilung der Atome zum großen Teil verschwunden, durch Diffusionsplatzwechsel haben die Goldatome meist die Würfecken und die Kupferatome meist die Flächenmitten besetzt. Dieser geordnete Atomzustand wird auch als Überstruktur bezeichnet. Grube usw. nennen die Legierungen mit Au-Gehalt bis zu 34 Atom-Prozent Au  $\beta$ -Kristalle.

1) W. Meißner u. B. Voigt, Ann. d. Phys. [5] 7. S. 761. 1930.

2) C. H. Johanson u. J. O. Linde, a. a. O.

3) Nach G. Sachs u. J. Weerts, a. a. O., sinkt die Gitterkonstante von 3,755 auf 3,751 ÅE, d. i. um  $\frac{1}{100}\%$ . Dadurch wird auch das spezifische Gewicht erhöht. Nach Messungen von H. J. Seemann an 3 Proben steigt es im Mittel von 11,97 auf 12,05.

Die dem zweiten tiefen Minimum entsprechende Legierung mit 50 Atom-Prozent Au ändert während des Tempens ihre Kristallform. Nach Johanson und Linde werden nach dem

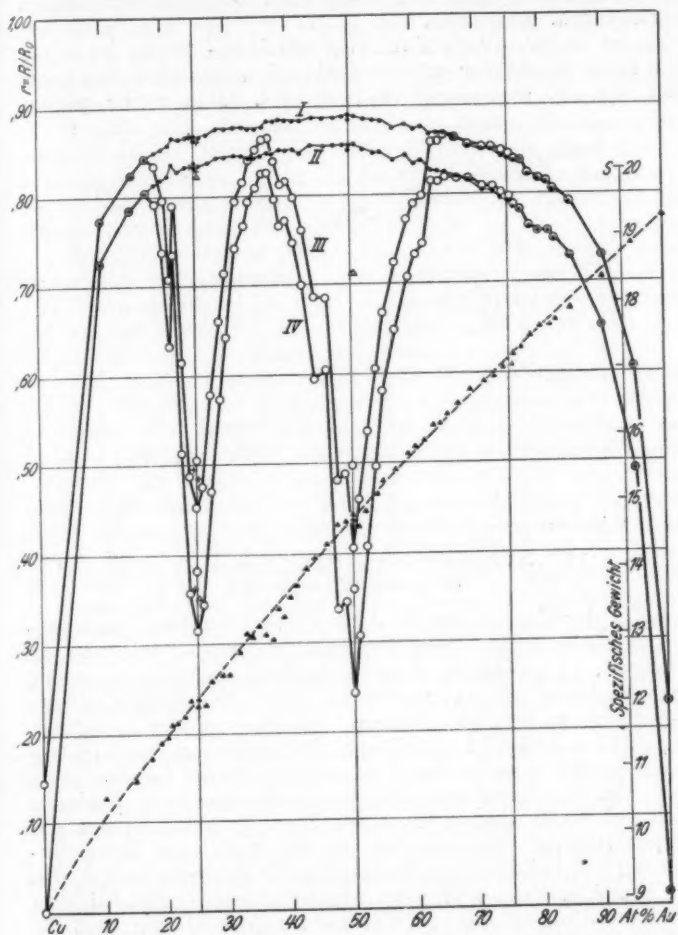


Fig. 2. Die  $r$ -Isothermen der Au-Cu-Legierungen und ihre spezifischen Gewichte. Die Kurven I und II beziehen sich auf den abgeschreckten Zustand, III und IV auf den getemperten Zustand.

Platzwechsel die Gitterebenen im wesentlichen abwechselnd nur von Au- bzw. Cu-Atomen gebildet, wobei eine Achse des Würfels verkürzt und das kubische Gitter zu einem tetragonalen wird. Die Legierung mit 37–62 Atom-Prozent Au nennen Grube usw.  $\gamma$ -Kristalle.

Im weiteren Verlauf von 63–100 Atom-Prozent Au zeigen die  $r$ -Isothermen der getemperten Legierungen ähnlichen Gang wie die des abgeschreckten Zustandes. Man würde geneigt



Fig. 3. Die  $r$ -Isothermen der Au-Cu-Legierungen in der Gegend von 75 Atom-Prozent Au

sein, in der Gegend von 75 Atom-Prozent Au aus Symmetriegründen ein drittes tiefes Minimum auf den  $r$ -Isothermen zu erwarten. Dies würde einer Verbindung  $Au_3Cu$  entsprechen. Das Minimum tritt zwar nicht ein, aber ohne Einfluß auf die  $r$ -Isothermen ist das einfache stöchiometrische Verhältnis 3 Au:1 Cu doch nicht geblieben. Die beiden  $r_N$ - und  $r_H$ -Isothermen der getemperten Legierungen (dieses Gebiet ist in der Fig. 3 in größerem Maßstabe gekennzeichnet) beginnen sich bei 69,10 Atom-Prozent Au über die  $r$ -Isothermen des abgeschreckten Zustandes zu erheben und diese kleine Erhebung hat bei 75 Atom-Prozent Au ihr Maximum von 8 bzw. 11 Promille, sinkt weiter langsam und verschwindet bei etwa 85 Atom-Prozent Au. Daraus kann man schließen, daß die Mischkristalle der getemperten Legierungen in der Gegend von 75 Atom-Prozent Au nicht identisch sind mit den  $\alpha$ -Mischkristallen der abgeschreckten Legierungen.

In Übereinstimmung hiermit fanden G. Grube und Mitarbeiter, daß die Temperaturwiderstandskurven (die die Abhängigkeit des spezifischen Widerstandes von der Temperatur darstellen) der Legierungen mit 65—85 Atom-Prozent Au in der Umgebung von 230° C Knicke aufweisen, welche eine Abnahme des Widerstandes der Legierungen bei dem Übergang aus dem getemperten Zustande in den  $\alpha$ -Zustand anzeigen, und sie schlossen daraus, daß die getemperten Legierungen mit 65—85 Atom-Prozent Au eine von den  $\alpha$ -Mischkristallen unterscheidbare Modifikation darstellen, die sie als  $\delta$ -Mischkristalle bezeichnen. Eine Überstruktur dieser Kristalle, wie sie bei denen mit 25 und 50 Atom-Prozent Au auftritt, wurde früher röntgenometrisch nicht gefunden.<sup>1)</sup>

Le Blanc und Wehner (a. a. O. S. 502) stellten aber neuerdings röntgenographisch bei einer getemperten Legierung von 70 Atom-Prozent Au auch tetragonale Kristallstruktur fest, jedoch mit kleinerem Achsenverhältnis ( $a/c = 1,03$ ) als bei 50 Atom-Prozent Au (hier  $a/c = 1,07$ ).

Bei den Legierungen mit 21,07 (Nr. 5a) und mit 21,55 (Nr. 6) Atom-Prozent Au zeigen die  $r$ -Isothermen ein Nebenminimum. Da diese Legierung nur in einem Einzelexemplar vorkam, läßt sich nicht sagen, ob dabei eine tiefere Ursache im Spiel ist. Vielleicht handelt es sich nur um eine individuelle Abweichung, da die  $r$ -Werte der abgeschreckten Legierung Nr. 6 (Kurve 1 und 2) auch aus der Reihe etwas nach oben abweichen. G. Schönmann<sup>2)</sup> hat auf Grund seiner Untersuchungen auch die Verbindung AuCu<sub>4</sub> angegeben und L. Nowack<sup>3)</sup> führt dieselbe in dem Zustandsdiagramm Au-Cu noch an. In der späteren zusammenfassenden Abhandlung von Grube, Schönmann usw. wird sie aber nicht mehr angegeben. In Übereinstimmung mit den vorliegenden Ergebnissen teilen auch Le Blanc und Wehner (a. a. O. S. 491) mit, daß sie in dem Gebiete von 20—21 Atom-Prozent Au in den Leitfähigkeitsisothermen Unstetigkeiten gefunden, aber die Existenz der Verbindung AuCu<sub>4</sub> nicht bestätigt haben. Das Gebiet in der Nähe von 20 Atom-Prozent Au bedarf also noch eines eingehenden experimentellen Studiums.

Kehrt man die Fig. 2 um, so stellen die  $r$ -Isothermen den Verlauf der mittleren Temperaturwiderstandskoeffizienten  $\bar{\alpha}$  dar, deren Absolutwerte man erhält, wenn man die Ordinaten  $1 - r$

1) G. Phragmen, Teknisk. Tidskr. 56. S. 81. 1926.

2) G. Schönmann, Dissertation Stuttgart 1929.

3) L. Nowack, Ztschr. f. Metallkunde 22. S. 99. 1930.

der I. und der III. Kurve durch 195 und die der II. und der IV. Kurve durch 252,4 dividiert, wie aus der Gleichung  $r = 1 + \bar{\alpha} \Delta t$ , wo  $\Delta t$  negativ ist, folgt.

#### 5. Über die Umwandlung der $\alpha$ -Mischkristalle in die $\gamma$ -Kristallart

Nach Dehlinger und Graf<sup>1)</sup> geschieht der Übergang von den kubischen  $\alpha$ -Mischkristallen von 50 Atom-Prozent Au in die tetragonalen  $\gamma$ -Kristalle der Verbindung AuCu in zwei Stufen, 1. beim Herabsinken der Temperatur unter den Umwandlungspunkt geht zunächst das kubische Gitter in kurzer Zeit in das tetragonale über, wobei die Au- und Cu-Atome noch beliebige Gitterpunkte besetzen, was aus dem fast völligen Fehlen der Überstrukturlinien erschlossen wurde. 2. Erst später, nach etwas längerem Tempern rücken die Atome auf die der Ordnung entsprechenden Plätze ein, so daß die Au-Atome die eine und die Cu-Atome die Nebengitterebene besetzen. Die dem Übergangsstadium 1) entsprechenden Mischkristalle mit tetragonalem Gitter, aber mit statistisch ungeordneter Atomverteilung wollen wir weiterhin als  $\epsilon$ -Modifikation bezeichnen. Diese besitzt nach Dehlinger und Graf besondere Härte und ihr elektrischer Widerstand ist kleiner als der der  $\alpha$ -Mischkristalle.

Aus den vorliegenden Untersuchungen muß man schließen, daß die Umwandlung der  $\alpha$ - in die  $\epsilon$ -Mischkristalle sehr rasch erfolgen kann, und daß sie, wenigstens teilweise, schon dann eintritt, wenn die Abschreckung nicht sehr rasch geschieht: Es wurden nämlich zuerst die in Glasröhrchen eingeschmolzenen Probestäbchen von 500° in kaltem Wasser in Bündeln zu je 20 Stück abgeschreckt, so daß der schnelle Zutritt von Wasser zu den mittleren Proben gehindert sein konnte. Die zugehörigen  $\tau$ -Isothermen I und II der Fig. 2 zeigten dann links und rechts von 50 Atom-Prozent Au zwei tiefere Einschnitte, die sich durch teilweise Ausbildung der  $\epsilon$ -Modifikation und eventuell der Überstruktur erklären lassen. Von diesen Probestäbchen wurden dann drei in evakuierte Quarzröhrchen eingeschmolzen und von 750° aus in Eiswasser abgeschreckt. Zwei Proben von diesen ergaben dann noch kleinere  $\tau$ -Werte. Der glatte Verlauf der  $\tau$ -Isothermen I und II in Fig. 2 konnte erst dann erzielt werden, wenn die in Glasröhrchen eingeschmolzenen Probestücke aus dem Ofen einzeln mit glühender Zange herausgenommen und rasch in Eiswasser abgeschreckt wurden. Zu dieser Prozedur sind die Quarzröhrchen ungeeignet; denn sie

1) U. Dehlinger u. L. Graf, a. a. O.

ertragen den großen Temperaturübergang ohne zu springen und verhindern schnelle Abkühlung der Legierungen.

Will man aus dem  $\gamma$ - den  $\alpha$ -Zustand erreichen, so ist ein längeres Glühen unnötig; die Aufmerksamkeit ist nur der schnellen Abschreckung zu widmen. Es wurden nämlich zum Schluß drei getemperte Probestäbchen in evakuierten Glasröhrchen einfach in der Gasflamme zur beginnenden Rotglut erwärmt, dann abgeschreckt und sie ergaben sehr hohe  $r$ -Werte des  $\alpha$ -Zustandes, in einem Falle noch etwas besser als nach dem tagelangen Glühen. Dies zeigt, daß die statistische ungeordnete Atomverteilung bei hoher Temperatur durch Atomdiffusion rasch eintritt.

6. Vergleich der vorliegenden Resultate mit denen von H. J. Seemann, W. Meißner, G. Grube, M. Le Blanc und G. Wehner

In Fig. 2 sind bei 25 Atom-Prozent Au mit den Zeichen + die  $r$ -Werte eingetragen, die von Seemann (a. a. O.) bei den Temperaturen des flüssigen Stickstoffs und Wasserstoffs an seiner III. und IV. Probe von 24,97 und 25,24 Atom-Prozent Au im abgeschreckten sowie im getemperten Zustande der Legierungen erhalten wurden. Die Seemannschen  $r$ -Werte liegen ein wenig höher als die von mir gefundenen, wonach das Tempern mir noch etwas besser als Seemann geglückt ist.

Mit dem Zeichen  $\Delta$  sind zwei  $r$ -Werte eingetragen, die sich auf die Temperatur des flüssigen Heliums und die Konzentrationen 25,2 und 25,24 Atom-Prozent Au beziehen und die W. Meißner erhielt, eingetragen. Sie zeigen, daß die getemperte Legierung AuCu, selbst bei den sehr tiefen Temperaturen (1,11 und 1,30° absol.) noch verhältnismäßig hohen Widerstand besitzt.

In Fig. 2 ist ferner bei 50 Atom-Prozent Au mit dem Zeichen  $\Delta$  noch ein  $r$ -Wert eingezeichnet, der ebenfalls von W. Meißner an einer Legierung von 50,3 Atom-Prozent Au bei der Temperatur des flüssigen Heliums (1,11 abs.) gemessen wurde. Derselbe sollte einer  $\alpha$ -Mischkristallart angehören. Wäre dies der Fall, so müßte offenbar dieser  $r$ -Wert viel höher liegen, wie aus dem Verlauf der I. und II. Kurve sich folgern läßt. Diese Probe wurde von Seemann mit Benutzung eines Quarzröhrchens abgeschreckt, und aus diesem Grunde erfolgte wohl die Abkühlung der Legierung nicht genügend rasch, so daß diese ganz oder teilweise in die  $\epsilon$ -Mischkristallart überging, die schon ein tetragonales Gitter aber noch ungeordnete Atomverteilung besitzt, eventuell auch schon teilweise in die Verbindung. Vergleiche hierzu den vorhergehenden Absatz.



Wahrscheinlich erklären sich so die Schwierigkeiten, die H. J. Seemann, a. a. O., S. 825, erwähnt.

Um die vorliegenden Untersuchungen mit denen von G. Grube usw. besser vergleichen zu können, wurden noch die spezifischen Widerstände der Legierungen bei der Temperatur  $0^{\circ}\text{C}$  im abgeschreckten und im getemperten Zustande gemessen. Diesbezügliche Zahlen enthält die Tab. 1 in der

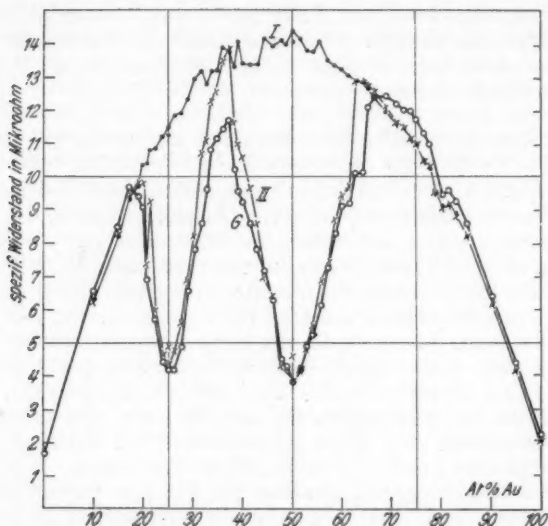


Fig. 4. Spezifische Widerstände der Au-Cu-Legierungen  
 Kurve I:  $\alpha$ -Mischkristalle,  $0^{\circ}\text{C}$ ,  
 Kurve II: getemperte Legierungen,  $0^{\circ}\text{C}$ ,  
 Kurve G: getemperte Legierungen,  $20^{\circ}\text{C}$ , nach Grube usw.

letzten und die Tab. 2 in der vorletzten Kolonne. Die letzte Kolonne der 2. Tabelle bringt die spezifischen Widerstände der getemperten Legierungen bei  $20^{\circ}\text{C}$ , wie sie aus den Leitfähigkeitsmessungen von Grube usw. berechnet wurden. Die graphische Darstellung ergibt die Fig. 4, in dem die stärker gezogene Kurve G die Grubeschen usw. Resultate vorstellt.

Die ziemlich unregelmäßige Kurve I des abgeschreckten Zustandes, verglichen mit der glatten Kurve I der Fig. 2, zeigt anschaulich die Überlegenheit der Methode der  $r$ -Werte gegenüber der Methode der spezifischen Widerstände.

die  
von  
noch  
spe-  
nde  
der

Viel interessanter sind die Kurven II und G. Im allgemeinen zeigen beide denselben Gang. Streng parallel verlaufen sie nur bis zu 17,5 Atom-Prozent Au und dann wieder von 85—100 Atom-Prozent Au, also in den Gebieten, wo das beigemengte Metall in starker Minderheit vorkommt, die G-Kurve oben, wie es der höheren Temperatur entspricht. Zwischen 17 und 65 Atom-Prozent Au liegt die G-Kurve meistens ein wenig tiefer als die Kurve II, was sich durch verschiedene Temperung der Legierungen erklären läßt. G. Grube usw. haben die Legierungen 60 Tage gleichmäßig von 400 auf 40° C getempert, dagegen wurden sie in der vorliegenden Untersuchung nur etwa 7 Tage zwischen 400 und 300° gehalten und dann in 36 Stunden auf Zimmertemperatur abgekühlt (Fig. 5).

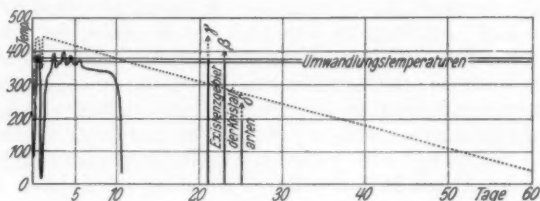


Fig. 5.

— Temperaturverlauf beim Tempern in dieser Arbeit,  
 ..... angenäherter Temperaturverlauf beim Tempern in den  
 Untersuchungen von Grube usw., a. a. O., S. 43.

Man sieht, daß die sehr lange Temperung eine ein wenig bessere Ausbildung der Verbindungen  $\text{AuCu}_3$  und  $\text{AuCu}$  bewirkt, daß diese aber nicht dem Zeitaufwand proportional ist. Die lange Temperung wirkt sich besonders in den Zwischengebieten bei 20, 37 und 63 Atom-Prozent Au aus, wo die Widerstandsisotherme stärker herabgedrückt wird.

In dem Gebiete von 75 Atom-Prozent Au decken sich die I. und II. Kurve der Fig. 4, dagegen liegt die G-Kurve merklich höher, was auf eine bessere Ausbildung der  $\delta$ -Mischkristalle bei Grube usw. hindeutet. Das läßt sich dadurch erklären, daß diese Kristallart oberhalb 250° C nicht mehr existiert, also nur unter dieser Temperatur sich ausbilden kann. Da dieses Temperaturintervall bei den vorliegenden Untersuchungen ziemlich rasch durchlaufen wurde, konnte die Ausbildung der  $\delta$ -Kristalle nicht so weit fortschreiten, daß sie auch durch den verschiedenen Verlauf der Widerstandsisothermen I und II stark verraten würden. Trotz dieses Umstandes konnte auch

zte  
der  
eit-  
Die  
ker  
ellt.  
ten  
2,  
erte

hier, dank der Empfindlichkeit der Methode der  $r$ -Werte, aus den  $r$ -Isothermen der Fig. 2 eine Unterstützung für die Grube-sche Annahme einer neuen Mischkristallart  $\delta$  erschlossen werden, wie es in Absatz 4 dargelegt wurde.

G. Grube usw. haben aus den Leitfähigkeitsisothermen, die zu den verschiedenen Temperaturen zwischen 320 bis 20° C gehören, erschlossen, daß das Leitfähigkeitsmaximum (also das Widerstandsminimum) in der Umgebung von 25 Atom-Prozent Au sich mit sinkender Temperatur auf die Seite der höheren Goldkonzentrationen verschiebt, von 24% Au bei 320° C zu 25,8% Au bei 20° C. Dieser Effekt wurde bei den vorliegenden Messungen nicht gefunden. Bei 0° C müßte das Widerstandsminimum sich bei der Legierung mit 26,4 Atom-Prozent Au vorfinden, dagegen liegt es bei 25 Atom-Prozent Au, wie die Fig. 4 zeigt. Auch wenn man die spezifischen Widerstände der beiden Proben 9 und 9a mittelt, so liegt noch das Minimum der Kurven bei 25 Atom-Prozent Au.

Die Methode der spezifischen Widerstände, die mit so manchen unkontrollierbaren Fehlerquellen behaftet sein kann, ist zur Auffindung so feiner Effekte, die nur einige Promille betragen, vielleicht nicht geeignet. Auch die zugehörige Figur der zitierten Arbeit läßt den Effekt unsicher erscheinen. Eine schwache Andeutung des Effektes möchte man in dem Verlauf der  $r$ -Isothermen III und IV der Fig. 2 erblicken. Wenn man nämlich die  $r$ -Werte der beiden Proben Nr. 9 und 9a mittelt, so liegt dieser Mittelwert etwas höher als der  $r$ -Wert der nächsten Probe mit 26 Atom-Prozent Au. Gegen die Mittelung läßt sich aber einwenden, daß man nach dem Sachverhalt nur die tiefsten erreichten  $r$ -Werte in Betracht ziehen muß, besonders, wenn man bei den Nachbarlegierungen, da sie nur in Einzelexemplaren vorkamen, keine ähnliche Korrektur durch Mittelung vornehmen kann.

Immerhin muß zugunsten des Verschiebungseffektes erwähnt werden, daß auch Le Blanc und Wehner (a. a. O., S. 505) angeben, daß die maximale Bildung der Verbindung  $\text{AuCu}_3$  nicht bei 25 sondern bei 25,6 Atom-Prozent Au liegt.

Die nach Abschluß dieser Untersuchungen veröffentlichte Mitteilung von Le Blanc und Wehner<sup>1)</sup> brachte das unerwartete Novum der Existenz einer neuen Verbindung  $\text{Au}_2\text{Cu}_3$ . Sie wird erschlossen aus einem Nebenmaximum der Leitfähig-

1) Le Blanc u. G. Wehner, Ann. d. Phys. [5] 14. S. 481. 1932. Dasselbst wird eine Arbeit von J. Haughton u. R. Payne (Journ. Inst. of Metals 46. S. 457. 1931) erwähnt, in welcher ebenfalls die Verbindung  $\text{Cu}_3\text{Au}_2$  festgestellt wurde.

keitsisothermen der getemperten Legierungen bei 40 Atom-Prozent Au und aus einem Minimum der thermoelektrischen Kraft dieser Legierungen gegen Nickel bei 100—150° C. Die von Grube usw. gefundenen Leitfähigkeitsisothermen, sowie die hier vorliegenden  $r$ -Isothermen und Widerstandsisothermen zeigen in der Gegend von 40 Atom-Prozent Au keine Andeutung eines Maximums bzw. Minimums. Das Zustandekommen desselben bei Le Blanc und Wehner läßt sich nur durch eine zweite, nachträgliche lange Temperung der Legierungen bei 200° erklären, bei der die Legierung mit 40 Atom-Prozent Au eine starke Leitfähigkeitszunahme erfuhr (a. a. O., S. 492). Ob diese so entstandenen Maxima als ein sicherer Beweis für die Existenz einer neuen Verbindung anzusehen sind oder etwa durch fremde Beimengungen (Silicium aus dem Schmelztiigel?) begünstigt wird, müssen weitere Untersuchungen entscheiden.

Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß die von Le Blanc und Wehner gezeichneten Leitfähigkeitsisothermen in der Gegend von 60—65 Atom-Prozent Au denselben eigenartigen Verlauf haben wie die hier vorliegenden  $r$ -Isothermen (Fig. 2. III und IV) und die Widerstandsisotherme (Fig. 4, II) im gleichen Konzentrationsgebiet.

#### Zusammenfassung

Es wurden 59 Gold-Kupferlegierungen mit 10—100 Atom-Prozent Au im abgeschreckten und im getemperten Zustande mit Hilfe des Verhältnisses der elektrischen Widerstände bei —195 und —252,4° C zu dem bei 0° C untersucht (Methode der  $r$ -Werte).

Die Methode der  $r$ -Werte erwies sich als sehr vorteilhaft und war teilweise zuverlässiger als die Methode der Messung der spezifischen Widerstände.

Die  $r$ -Isothermen der abgeschreckten Legierungen zeigen die typische Form, wie sie in den Konzentration-Widerstandskurven von zwei Metallen, die in allen Verhältnissen Mischkristalle bilden, auftreten.

Die  $r$ -Isothermen der getemperten Legierungen besitzen bei 25 und 50 Atom-Prozent Au tiefe und scharfe Minima, die die Entstehung der intermetallischen Verbindungen AuCu<sub>3</sub> und AuCu anzeigen. Bei 75 Atom-Prozent Au verlaufen diese  $r$ -Isothermen höher als die der abgeschreckten Legierungen, was auf die Ausbildung einer besonderen Modifikation der Mischkristalle dieses Konzentrationsgebietes durch das Tempern hinweist.

Die bisherigen Forschungsergebnisse, besonders die von G. Grube und seinen Mitarbeitern, über das Au-Cu-System wurden in allen wesentlichen Teilen bestätigt, nur der Effekt, daß sich das Leitfähigkeitsmaximum in dem Gebiet um  $\text{AuCu}_3$  mit niederen Temperaturen zu den höheren Goldkonzentrationen verschiebt, wurde nicht wiedergefunden. Die Gebiete um 20 bzw. 40 Atom-Prozent Au, bei denen die vorliegenden Untersuchungen bzw. die von Le Blanc und Wehner auf Verbindungsbildung hindeuten, bedürfen noch eingehender experimenteller Untersuchung.

Die erhaltenen  $r$ -Isothermen und Widerstandsisothermen zeigen bei 40 Atom-Prozent Au keine Singularitäten (wahrscheinlich wegen der nur einfach vorgenommenen Temperung der Legierungen), die die Existenz der von Le Blanc und Wehner angegebenen Verbindung  $\text{Au}_2\text{Cu}_3$  bestätigen könnten.

Der Verf. dankt ergebenst den Regierungen des Deutschen Reiches und der Tschechoslowakischen Republik für die Erteilung eines Austauschstipendiums, welches ihm das Arbeiten in Berlin ermöglichte. Zu besonderem Dank ist er verpflichtet Herrn Präsidenten Prof. Dr. Fr. Paschen für die gastfreundliche Aufnahme in die Physikalisch-Technische Reichsanstalt und dem Leiter des Kältelaboratoriums, Herrn Oberregierungsrat Dr. W. Meißner für seine wertvollen Ratschläge und sein förderndes Interesse an dieser Arbeit.

Prag II, Böhmisches Technische Hochschule.

(Eingegangen 11. Juni 1933)

---

## **Zur Polarisation des Kanalstrahllichtes**

**Von Werner Romberg**

(Mit 2 Figuren)

### **§ 1. Einleitung**

Stark<sup>1)</sup> beobachtete 1906, daß das Licht, welches von einem Wasserstoffkanalstrahl ausgesandt wird, teilweise polarisiert ist. Und zwar bevorzugt der elektrische Vektor der Ausstrahlung die Kanalstrahlrichtung vor einer zu ihr senkrechten.

Wollen wir das Auftreten von polarisiertem Licht verstehen, so müssen wir zuvor nach der Entstehungsart der Strahlung fragen. Der Kanalstrahl besteht zum Teil aus Ionen, zum Teil auch aus neutralen Atomen, die aus den Ionen durch „Umladung“, das heißt Anlagerung eines Elektrons an das Ion, entstanden sind. Gelangt nun dieses Gemisch von Ionen und neutralen Atomen mit erheblicher Geschwindigkeit in ein Gas, so werden die Zusammenstöße zu Anregung der Kanalstrahlteilchen und des ruhenden Gases führen. Die angeregten Teilchen gehen, unter Lichtemission, in den Grundzustand über. Das emittierte Licht können wir in zwei Gruppen einteilen, entsprechend dem Bewegungszustand der emittierenden Teilchen, in bewegte und in ruhende Intensität, die in bekannter Weise durch den Dopplereffekt unterschieden werden. Uns wird hier nur die bewegte Intensität interessieren, weil sie nach Messungen von Fr. Lub an *H*-Kanalstrahlen sowohl intensiver wie wesentlich stärker polarisiert ist als die ruhende.<sup>2)</sup>

Diese bewegte Intensität kann zweifachen Ursprungs sein:

- A. Entweder kann ein Ion des Kanalstrahls ein Elektron in einen angeregten Zustand einfangen; wir nennen den Vorgang „Neutralisation“.
- B. Oder zweitens kann das Elektron eines der im Kanalstrahl vorhandenen neutralen Teilchen durch Stoß in das höhere Energieniveau gehoben werden.

1) J. Stark, Verh. d. Phys. Ges. S. 104. 1906.

2) W. A. Lub, Arch. Néerl. Sc. Ex. III A. 14. S. 118. 1933.

Unser Interesse wendet sich jetzt der Polarisation zu. In dem von uns betrachteten Prozeß wird die Polarisation durch die Kanalstrahlrichtung ermöglicht. Nach Döpel und v. Hirsch<sup>1)</sup> zeigen nur  $H$ -Kanalstrahlen wesentliche Polarisation und zwar besonders stark in  $H_2$ , wir beschränken uns im folgenden auf diesen Fall. Von den beiden erwähnten Anregungsmöglichkeiten A und B ist nun nach neuen Experimenten von Döpel<sup>2)</sup> B weitaus häufiger realisiert als A.

Döpel trennt durch ein zwischen Entladungsrohr und Beobachtungsrohr angelegtes elektrisches Feld die geladenen von den ungeladenen Teilchen des Kanalstrahles.<sup>3)</sup> Sind die geladenen Teilchen die Erreger des Lichtes, so wird das Leuchten längs der abgelenkten Bahn auftreten; die unabgelenkten Kanalstrahlteilchen verlaufen unmittelbar hinter dem Kondensator ohne Leuchten; erst auf ihrem weiteren Weg beginnt allmählich die Lichtemission, entsprechend der Zahl der durch Umladung neu entstandenen geladenen Teilchen. Dieses Verhalten zeigt nach den Aufnahmen von Döpel z. B. die Bande 3914 des  $N_2^+$ -Ions.

Wird dagegen das Licht von den neutralen Teilchen des Kanalstrahls emittiert, so wird der unabgelenkte Strahl mit Eintritt in das Gas sogleich in voller Stärke leuchten, während der abgelenkte Strahl unmittelbar hinter dem Kondensator kein Licht aussenden wird. Genau diesen Tatbestand zeigt das von einem  $H$ -Kanalstrahl bei seinem Eintritt in  $H_2$ -Atmosphäre emittierte Licht. Der Hauptteil der Intensität der Balmerlinien entsteht demnach durch neutrale Atome.

Ogleich somit bewiesen ist, daß der Fall A physikalisch weit seltener realisiert ist als der Fall B, haben wir uns (vor Kenntnis der Döpelschen Versuche) bei der Rechnung auf Fall A beschränkt und dabei außerdem die idealisierende Annahme gemacht, daß das eingefangene Elektron vor der Einfangung frei und in Ruhe sei.<sup>4)</sup> Hierdurch wird das Problem der Wechselwirkung von Proton und Wasserstoffmolekül zu einem Wasserstoffatomproblem, nämlich Proton + Elektron, ver-

1) R. Döpel u. R. v. Hirsch, *Ann. d. Phys.* [4] 82. S. 16. 1927.

2) Wir sind Hrn. Döpel für eine diesbezügliche briefliche Mitteilung sehr zu Dank verpflichtet.

3) Näheres vgl. § 3 der Arbeit von Döpel, *Ann. d. Phys.* [5] 16. S. 1. 1933.

4) In Wirklichkeit wird es an ein  $H_2$ -Molekül gebunden sein. Jede Verschiedenheit der Gase, in die der Kanalstrahl einfällt, wird durch diese Annahme vernachlässigt.



einfacht; die Eigenfunktionen des Prozesses werden die bekannten Wasserstoffeigenfunktionen, und damit wird eine exakte mathematische Behandlung ermöglicht.

## § 2. Matrixelemente und Intensitätsformel

Das Problem der Einfangung des freien ruhenden Elektrons durch das bewegte Proton von der Geschwindigkeit  $v_p$  muß in einem Koordinatensystem behandelt werden, in dem der Schwerpunkt des Systems ruht. Da der Schwerpunkt praktisch mit dem Proton zusammenfällt, heißt das: Ein freies, mit der Geschwindigkeit  $v_p$  einlaufendes Elektron wird von einem ruhenden Proton eingefangen. Die Eigenfunktion des Elektrons lautet nach Sommerfeld<sup>1)</sup>

$$(1) \quad \psi = \sum_l (2l+1) \cdot i^l \chi_l(K, r) \cdot P_l(\cos \vartheta).$$

Dabei ist  $\chi_l(K, r)$  die normierte Lösung der radialabhängigen Schrödingergleichung

$$(2) \quad \frac{d^2 \chi_l}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d \chi_l}{dr} + \left( K^2 + \frac{e^2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \chi_l = 0,$$

wo

$$(3) \quad K = \frac{m v_p}{\hbar}.$$

$\chi_l$  steht zu der von Gordon<sup>2)</sup> benutzten Funktion  $X_{n_r, l}$  in der Beziehung

$$(4) \quad \chi_l = X_{n_r, l} \cdot M_l = X_{n_r, l} \cdot \frac{K^l \cdot \Gamma(-n_r)}{(2l+1)! e^{-\frac{\pi}{2Ka}}}.$$

Dabei ist die radiale Quantenzahl

$$(5) \quad n_r = n_k - l - 1 = \frac{i}{Ka} - l - 1 \quad (a = \text{Wasserstoffradius}).$$

Wir benötigen nun das Matrixelement für den Übergang vom Zustand (1) zu irgendeinem diskreten Zustand  $n, l, m_l$ . Nach der  $l$ -Auswahlregel tragen hierzu nur die beiden Glieder  $l' = l+1$  und  $l' = l-1$  der Summe (1) bei. Berücksichtigt man dies, und benutzt man die Formeln von Gordon für die Matrixelemente, so erhält man

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. [5] 11. S. 257. 1931.

2) W. Gordon, Ann. d. Phys. [5] 2. S. 1031. 1929.

$$(6) \left\{ \begin{aligned} q_{n_l l_1 m_1}^{n_k 0} &= i^{2n_l - l_1 + 1} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \frac{a}{2l_1 + 1} \sqrt{\frac{2l_1 + 1}{2}} \frac{(l_1 - m_1)!}{(l_1 + m_1)!} \\ &\quad \cdot \frac{1}{16} N(n_r, l_1) \cdot u^{n_k + n_r - 2} \cdot \left( \frac{2a n_k n_l}{n_k - n_l} \right)^{2l_1 + 2} \\ &\quad \cdot \left[ M_{l_1 + 1} \cdot \alpha_1 \cdot \frac{(l_1 + 1)!}{(l_1 - m_1)!} n_k (2l_1 + 3)! \left( \frac{2a n_k n_l}{n_k + n_l} \right)^2 \right. \\ &\quad \cdot \left\{ F\left(l_1 + 2 - n_k, -n_r, 2l_1 + 2, 1 - \frac{1}{u^2}\right) \right. \\ &\quad \left. \left. - u^2 \cdot F\left(l_1 - n_k, -n_r, 2l_1 + 2, 1 - \frac{1}{u^2}\right) \right\} \right. \\ &\quad \left. - M_{l_1 - 1} \cdot \alpha_2 (1 - \delta_{l_1, 0}) \frac{(l_1 + m_1)!}{(l_1 - 1)!} n_l (2l_1 + 1)! \left( \frac{n_k - n_l}{n_k + n_l} \right)^2 \right. \\ &\quad \cdot \left\{ F\left(l_1 - n_k, -n_r, 2l_1, 1 - \frac{1}{u^2}\right) \right. \\ &\quad \left. \left. - u^2 F\left(l_1 - n_k, -n_r - 2, 2l_1, 1 - \frac{1}{u^2}\right) \right\} \right]. \end{aligned} \right.$$

Dabei ist

$$u = \frac{n_k - n_l}{n_k + n_l}, \quad N(n_r, l) = \frac{2}{(2l + 1)! (n a)^{l+2}} \sqrt{\frac{a(n + l)!}{(n - l - 1)!}},$$

ferner

$$\text{für } q = z \quad \alpha_1 = -2, \alpha_2 = +2, \text{ wenn } m_1 = 0, \\ \text{sonst } \alpha_1 = \alpha_2 = 0;$$

$$\text{für } q = \xi = \frac{x + iy}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{m_1(m_1 + 1)}{\sqrt{2}}, \text{ wenn } m_1 = 1, \\ \text{sonst } \alpha_1 = \alpha_2 = 0;$$

$$\text{für } q = \eta = \frac{x - iy}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{m_1(m_1 - 1)}{\sqrt{2}}, \text{ wenn } m_1 = -1, \\ \text{sonst } \alpha_1 = \alpha_2 = l.$$

Weiter brauchen wir das Matrixelement für Übergänge von einem diskreten Zustand zum anderen, es ist

$$(7) \left\{ \begin{aligned} q_{n' l' - 1 m'}^{n l m} &= A \cdot \frac{(l + m)!}{(l' - m')!} \cdot \frac{2}{(2l + 1)(2l' + 1)} \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{2l + 1}{2}} \frac{(l - m)!}{(l + m)!} \sqrt{\frac{2l' + 1}{2}} \frac{(l' - m')!}{(l' + m')!} \cdot C_{n' l' - 1}^{n l}. \end{aligned} \right.$$

Hierin bedeuten:

$$C_{n' l' - 1}^{n l} = N(n_r, l) N(n_r', l - 1) \frac{a n}{16} \cdot (-1)^{n_r'} \cdot (2l + 1)! \left( \frac{2a n n'}{n - n'} \right)^{2l + 2} \\ \cdot \left( \frac{n - n'}{n + n'} \right)^{n + n'} \cdot \left\{ F\left(-n_r, -n_r', 2l, \frac{-4 n n'}{(n - n')^2}\right) \right. \\ \left. - \left( \frac{n - n'}{n + n'} \right)^2 \cdot F\left(-n_r - 2, -n_r', 2l, \frac{-4 n n'}{(n - n')^2}\right) \right\}$$

und

für  $q = z$ :  $A = 1$ , wenn  $m = m'$ , sonst  $A = 0$ ,

für  $q = \xi$ :  $A = \frac{(m' - m + 1)(m - m')}{2\sqrt{2}}$ , wenn  $m - m' = -1$ ,  
sonst  $A = 0$ ,

für  $q = \eta$ :  $A = \frac{(m - m' + 1)(m - m')}{2\sqrt{2}}$ , wenn  $m - m' = +1$ ,  
sonst  $A = 0$ .

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Elektron zunächst unter Aussendung von Licht einer beliebigen Polarisationsrichtung  $q$  in den angeregten Zustand  $n$  und dann unter Aussendung von Licht der bestimmten Polarisationsrichtung  $p$  in den tieferen Zustand  $n'$  übergeht, ist proportional

$$(8) \quad J_p = \sum_{l' m'} \sum_q \left| \sum_{l m} q_{n l m}^0 P_{n' l' m'}^{n l m} \right|^2.$$

Wir müssen dabei über die verschiedenen  $l$  und  $m$  des Zwischenzustands kohärent summieren, weil diese Zustände exakt entartet sind. Über Zwischenzustände verschiedener Energie wäre dagegen inkohärent zu summieren. Voraussetzung ist dabei, daß die Energiedifferenz groß ist gegen die natürliche Linienbreite.<sup>1)</sup>

Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn wir den Elektronenspin mit berücksichtigen. Dann ist das Niveau  $n$  in Teilniveaus mit verschiedenem  $j$  aufgespalten. Die Übergänge, die über verschiedene  $j$  führen, erfolgen dann unabhängig voneinander, ihre Intensitäten sind daher zu addieren, und nicht ihre Amplituden.<sup>2)</sup> Statt der Intensitätsformel (8) tritt dann also:

$$(9) \quad J_p = \sum_{j' l' m'} \sum_{q j} \left| \sum_{l m} Q_{n j l m}^{n_2 0} P_{n' j' l' m'}^{n j l m} \right|^2.$$

1) H. Bethe, Handb. d. Phys. XXIV, I, S. 452ff.

2) Daß in unserem Fall wirklich die Energiedifferenz groß gegen die natürliche Linienbreite ist, weisen wir nach für den Term  $n = 6$ , für den die Bedingung am schlechtesten von allen für uns in Frage kommenden Termen erfüllt ist. Die Lebensdauer des kurzlebigsten Zustandes ( $6p$ ) ist  $4,1 \cdot 10^{-8}$  sec (H. Bethe, a. a. O., S. 444, Tab. 17), seine natürliche Breite ist das reziproke davon, also  $2,4 \cdot 10^7$  sec $^{-1} = 0,8 \cdot 10^{-3}$  cm $^{-1}$ . Der Abstand der Terme  $j = 1/2$  und  $j = 3/2$  ist nach der Feinstrukturformel

$$\Delta E_{\text{spin}} = \frac{-R h \alpha^2}{n^3} \left( \frac{1}{j_1 + \frac{1}{2}} - \frac{1}{j_2 + \frac{1}{2}} \right) = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1},$$

also noch viel größer.

Wir haben hier die magnetische Quantenzahl  $\mu = m \pm \frac{1}{2}$  genannt, um sie von der ganzzahligen magnetischen Quantenzahl  $m$  des Bahnmoments zu unterscheiden, die in der „spin-freien“ Formel (8) auftritt. Außerdem haben wir ebenfalls zwecks besserer Unterscheidung große Buchstaben für die Matricelemente mit Berücksichtigung des Spins eingeführt.

Um die Intensitäten mit Berücksichtigung des Spins auszurechnen, brauchen wir noch die Spineigenfunktionen. Wir nehmen sie in der Paulischen Form:

$$\begin{pmatrix} a_{j\mu}^I \psi_{n l \mu - \frac{1}{2}} \\ b_{j\mu}^I \psi_{n l \mu + \frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

wo

$$(10) \quad \begin{cases} a_{j\mu}^I = \sqrt{\frac{j+\mu}{2j}} \text{ für } j=l+\frac{1}{2} \text{ und } = \sqrt{\frac{j-\mu+1}{2j+2}} \text{ für } j=l-\frac{1}{2}, \\ b_{j\mu}^I = -\sqrt{\frac{j-\mu}{2j}} \text{ für } j=l+\frac{1}{2} \text{ und } = \sqrt{\frac{j+\mu+1}{2j+2}} \text{ für } j=l-\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Die Benutzung dieser Funktionen ist jedoch nur für den Zwischenzustand  $n, j, l, m$  notwendig, für Anfangs- und Endzustand kann man die einfacheren Eigenfunktionen  $\begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix}$  bzw.  $\begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix}$  nehmen, welche positivem bzw. negativem Spin  $\sigma = \pm \frac{1}{2}$  entsprechen. Im Anfangszustand ist dies evident, und wir können hier ein für allemal  $\sigma = +\frac{1}{2}$  wählen. Für den Endzustand folgt es durch eine einfache Rechnung.

### § 3. Berechnung der Polarisation

Wir berechnen die Polarisation für die erste Linie der Lymanserie, zunächst unter der Annahme, die Spinaufspaltung sei zu vernachlässigen. Für die erste Lymanlinie sind unsere Indizes  $n=2$ ,  $n'=1$ ,  $l'=0$ ,  $m'=0$ ; die Auswahlregel für  $l$  fordert  $l=1$ ,  $m$  ist durch die im allgemeinen komplexe Koordinate  $p$  bestimmt;  $m$  legt seinerseits wieder die Bedeutung der Koordinate  $q$  fest; es muß nämlich  $q=p^*$  sein, dann bleibt von der Summe in (8) nur ein einziges Glied stehen, und es wird die Polarisation

$$(11) \quad P = \frac{J_{\parallel}}{J_{\perp}} = \frac{J_z}{J_x} = \frac{\begin{vmatrix} z_2^{n\frac{1}{2}} & 0 & z_2^{2\frac{1}{2}} & 0 \\ z_2^{1\frac{1}{2}} & 0 & z_2^{1\frac{1}{2}} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \eta_2^{n\frac{1}{2}} & 0 & \xi_2^{2\frac{1}{2}} & -1 \\ \eta_2^{1\frac{1}{2}} & -1 & \xi_2^{1\frac{1}{2}} & 0 \end{vmatrix}}.$$

Nach Gl. (7) ist der Quotient

$$(12) \quad \frac{\begin{vmatrix} z^2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \xi & 1 & 0 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} z^2 & 1 & -2 \\ \xi & 1 & 0 \end{vmatrix}^2} = 1.$$

Die kontinuierlich-diskreten Matricelemente werden nach (6):

$$\begin{aligned} z_{210}^{n_k 0} &= 1 \cdot \left\{ M_2 \cdot (-1) \cdot n_k \cdot 5! \left[ \frac{2a n_k \cdot 2}{n_k + 2} \right]^2 \cdot \alpha \right. \\ &\quad \left. - M_0 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 3! \left[ \frac{n_k - 2}{n_k + 2} \right]^2 \beta \right\} U, \\ \eta_{21-1}^{n_k 0} &= 2 \cdot \left\{ M_2 \cdot (-2) \cdot 2! \cdot n_k \cdot 5! \left[ \frac{2a n_k \cdot 2}{n_k + 2} \right]^2 \cdot \alpha \right. \\ &\quad \left. - M_0 \cdot (+2) \cdot 2 \cdot 3! \left[ \frac{n_k - 2}{n_k + 2} \right]^2 \beta \right\} \cdot U, \end{aligned}$$

wo die Abkürzungen

$$\begin{aligned} \alpha &= F \left( 3 - n_k, 0, 4, \frac{-8 n_k}{(n_k - 2)^2} \right) \\ &\quad - \left( \frac{n_k - 2}{n_k + 2} \right)^2 \cdot F \left( 1 - n_k, 0, 4, \frac{-8 n_k}{(n_k - 2)^2} \right) = \frac{8 n_k}{(n_k + 2)^2}, \\ \beta &= F \left( 1 - n_k, 0, 2, \frac{-8 n_k}{(n_k - 2)^2} \right) \\ &\quad - \left( \frac{n_k - 2}{n_k + 2} \right)^2 \cdot F \left( 1 - n_k, 2, -2, \frac{-8 n_k}{(n_k - 2)^2} \right) = \frac{-8 n_k^3}{3 (n_k^2 - 4)} \end{aligned}$$

benutzt sind, und  $U$  ein nicht interessierender Faktor ist. Setzen wir:

$$\zeta = \frac{M_2 \cdot (-1) n_k \cdot 5! \left[ \frac{4a n_k}{n_k + 2} \right]^2 \cdot \alpha}{M_0 \cdot 2 \cdot 3! \left[ \frac{n_k - 2}{n_k + 2} \right]^2 \cdot \beta},$$

so wird die Polarisation  $P = \left| \frac{2\zeta - 1}{\zeta + 1} \right|^2$ ; nach (4) beträgt  $\frac{M_2}{M_0} = -\frac{(n_k - 2)(n_k - 1)}{5! a^2 n_k^2}$ , daher  $\zeta = \frac{-4(n_k - 1)}{n_k + 2}$  und  $P = \left| \frac{2 - 3n_k}{2 + n_k} \right|^2$ .

Die kontinuierliche Hauptquantenzahl  $n_k$  ist komplex,  $= \frac{i}{ka}$ ;  $ka$  bedeutet die Geschwindigkeit des Protons, gemessen in Einheiten der Elektronengeschwindigkeit in der ersten Bohrschen Bahn,  $ka = \frac{v_P}{\alpha \cdot c}$ . Die Polarisation ist eine reine Funktion des Quadrats der Geschwindigkeit  $ka$ , welches wir mit  $\varepsilon$  bezeichnen wollen.  $\varepsilon = 1$  entspricht einer Energie von

$$1838 \cdot 13,54 = 24890 \text{ e-Volt.}$$

Die Polarisation der ersten Lymanlinie, ohne Spinaufspaltung, bestimmt sich zu:

$$(13) \quad P_0 = \frac{4s + 9}{4s + 1}.$$

Spaltet das mittlere Niveau durch den Spin auf, so werden die Formeln für die Polarisation komplizierter. Wir müssen zunächst in Gl. (9) die Matricelemente durch die gewöhnlichen Matricelemente ohne Spin ausdrücken. Es ist unter Beachtung des über die Spinfunktionen Gesagten:

$$(14) \quad \begin{cases} Q_{n \, l \, j \, \mu}^{n_k \, 0 \, 0} = +\frac{1}{2} = a_{j \, \mu}^l \cdot q_{n \, l \, \mu}^{n_k \, 0} - \frac{1}{2}, \\ P_{n' \, l' \, m' \, \sigma}^{n \, l \, j \, \mu} = +\frac{1}{2} = a_{j \, \mu}^l \cdot p_{n' \, l' \, m'}^{n \, l \, \mu} - \frac{1}{2}, \\ P_{n' \, l' \, m' \, \sigma}^{n \, l \, j \, \mu} = -\frac{1}{2} = b_{j \, \mu}^l \cdot p_{n' \, l' \, m'}^{n \, l \, \mu} - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Berücksichtigt man die Werte der  $a$  und  $b$  nach (10) und die Auswahlregeln, so erhält man:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} J_p &= \sum_{l' m' l} \frac{1}{(2l+1)^2} |p_{l' m'}^l|^2 \cdot \sum_q \left\{ |q_{n \, l \, m_p}^{n_k \, 0}|^2 \cdot [(l+1)^2 + l^2 + 2m_p^2] \right. \\ &\quad + |q_{n \, l \, m_p-1}^{n_k \, 0}|^2 (l+m_p)(l-m_p+1) \\ &\quad \left. + |q_{n \, l \, m_p+1}^{n_k \, 0}|^2 (l+m_p+1)(l-m_p) \right\}, \end{aligned} \right.$$

wobei  $m_p = m'$  für  $p = z$  und  $m_p = m' - 1$  für  $p = \xi$  ist.

Diese Formel gilt ganz allgemein, nicht nur für die Lymanlinie.

Die Polarisation der ersten Lymanlinie läßt sich durch die oben berechnete Polarisation  $P_0 = \frac{4s+9}{4s+1}$  ausdrücken. Nach (15) ist

$$\begin{aligned} J_s &= \frac{1}{3^2} |z_{00}^{10}|^2 \cdot \left\{ |z_{20}^{n_k \, 0}|^2 [2^2 + 1^2 + 0] + |\eta_{21-1}^{n_k \, 0}|^2 \cdot 2 + |\xi_{211}^{n_k \, 0}|^2 \cdot 2 \right\}; \\ J_\xi &= \frac{1}{3^2} |\xi_{00}^{1-1}|^2 \cdot \left\{ |\eta_{21-1}^{n_k \, 0}|^2 [2^2 + 1^2 + 2] + \quad + |z_{210}^{n_k \, 0}|^2 \cdot 2 \right\}. \end{aligned}$$

Wegen  $|\xi_{211}^{n_k \, 0}|^2 = |\eta_{21-1}^{n_k \, 0}|^2$  und Gl. (12) wird

$$(16) \quad P = \frac{5 |z_{210}^{n_k \, 0}|^2 + 4 |\eta_{21-1}^{n_k \, 0}|^2}{7 |\eta_{21-1}^{n_k \, 0}|^2 + 2 |z_{210}^{n_k \, 0}|^2} = \frac{5 P_0 + 4}{2 P_0 + 7} = \frac{36s + 49}{36s + 25}.$$

Die Polarisation ist also wesentlich verschieden von dem ohne Spinaufspaltung gerechneten Wert; für sehr kleine Geschwin-

digkeiten des Protons beträgt sie etwa 2 an Stelle des Wertes 9 der (physikalisch bedeutungslosen) Formel (13). (Graphische Darstellung vgl. Fig. 1.)

Für die Balmerserie ist  $n' = 2$ ,  $l' = 1$  oder 0; Gl. (15) besteht dann für  $p = z$  und  $p = \xi$  aus 11 bzw. 9 Gliedern, die ihrerseits die Matricelemente für  $z$  und  $\xi$  enthalten. Letztere sind aus (6) oder (7) zu entnehmen, wobei die hypergeometrischen Reihen spätestens mit dem 5. Gliede abbrechen. Schließlich erhält man für die Polarisation von  $H_\alpha$  und  $H_\beta$  als Funktion der Protonenenergie  $\epsilon$  (vgl. S. 521):

$$(17) \quad \begin{cases} P_{H_\alpha} = \frac{\epsilon^4 + 4,79 \epsilon^3 + 7,90 \epsilon^2 + 4,00 \epsilon + 0,588}{\epsilon^4 + 4,79 \epsilon^3 + 5,01 \epsilon^2 + 2,03 \epsilon + 0,253} \\ P_{H_\beta} = \frac{\epsilon^6 + 5,266 \epsilon^5 + 9,291 \epsilon^4 + 5,447 \epsilon^3 + 1,165 \epsilon^2 + 0,0749}{\epsilon^6 + 5,266 \epsilon^5 + 6,156 \epsilon^4 + 2,895 \epsilon^3 + 0,539 \epsilon^2 + 0,0315} \end{cases}$$

Fig. 1 zeigt die Abhängigkeit der Polarisation von  $H_\alpha$  und  $L_i$  von der Energie.  $P_{H_\beta}$  weicht fast gar nicht von  $P_{H_\alpha}$  ab, so daß die Darstellung in einer Zeichnung unmöglich wird. Die Übereinstimmung von  $P_{H_\alpha}$  und  $P_{H_\beta}$  zeigt folgende Tabelle:

$\epsilon = 0,0$	0,01	0,1	0,5	1,0	5,0
$P$ von $H_\alpha = 2,3278$	2,300	2,100	1,6447	1,3966	1,0605
$P$ von $H_\beta = 2,3752$	2,342	2,114	1,6434	1,4026	1,0627

Die maximale Abweichung liegt bei  $\epsilon = 0$  und beträgt 2%. Für große Protonengeschwindigkeiten wird das Licht unpolarisiert,  $P \rightarrow 1$ ; und zwar für die Balmerlinien schon für geringere Geschwindigkeiten als für die Lymanlinie.

Weiter zeichnen wir die Kurven ein, die sich ohne Berücksichtigung der Spinaufspaltung ergeben würden; die Rechnung läuft genau analog und gibt ebenfalls Übereinstimmung der Polarisation für  $H_\alpha$  und  $H_\beta$ . Der gänzlich andere Kurvenverlauf zeigt die Notwendigkeit, die Spinaufspaltung zu beachten.

Ein großer Teil des experimentellen Materials bezieht sich auf  $H_\gamma$  und  $H_\delta$ . Wir dürfen vermuten, daß auch diese einen ähnlichen Kurvenverlauf ergeben werden. Denn im Grenzfall großer Geschwindigkeiten verschwindet die Polarisation des Lichtes für die höheren Glieder der Balmerserie genau wie für die niederen nach Gl. (17) mit  $\epsilon^{-2}$ . Um unsere Vermutung, die Polarisation sei innerhalb der Balmerserie wesentlich die gleiche, auch für kleine Geschwindigkeiten zu stützen, haben wir die Polarisation von  $H_\gamma$  und  $H_\delta$  im Grenzfall kleinster Protonengeschwindigkeiten,  $n_k \rightarrow \infty$  untersucht und fanden für



$H_\gamma$  2,42 und für  $H_\beta$  2,33. Die Zahlenwerte liegen ebenfalls nahe den entsprechenden Werten von  $H_\alpha$  und  $H_\beta$ .

Wir können schließen, daß die untere ausgezogene Kurve der Fig. 1, welche die Polarisation von  $H_\alpha$  exakt angibt, nicht nur zugleich die Polarisation von  $H_\beta$ , sondern auch von  $H_\gamma$  und  $H_\delta$ , mit großer Genauigkeit darstellt.

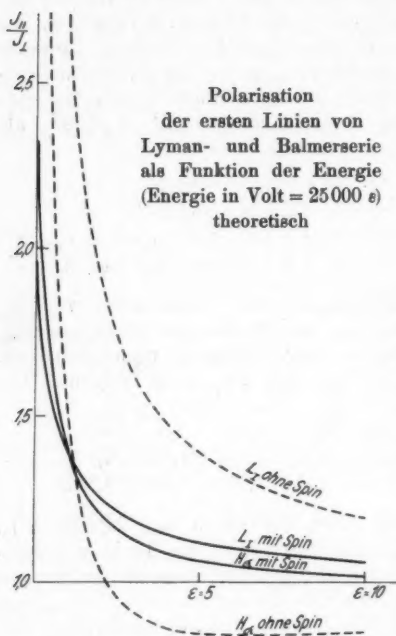


Fig. 1

#### § 4. Vergleich mit der Erfahrung

Wir wollen zunächst zusammenstellen, was wir auf Grund unseres stark idealisierten Modells für die Polarisation der bewegten Intensität des Kanalstrahls voraussetzen können.

I. Wir erhalten für das Verhältnis der Intensität parallel dem Kanalstrahl,  $J_{\parallel}$ , zur Intensität in einer beliebigen dazu senkrechten Richtung,  $J_{\perp}$ , stets einen Wert  $> 1$ . Der

elektrische Vektor der Strahlung liegt bevorzugt in der Kanalstrahlrichtung.

II. Die Polarisation  $P = \frac{J_{\parallel}}{J_{\perp}}$  der Balmerlinien nimmt mit wachsender Spannung ab. Sie beträgt im Grenzfall unendlich kleiner Kanalstrahlgeschwindigkeit 2,35, nimmt den Wert 1,40 an, wenn die Geschwindigkeit des Kanalstrahls gleich der des Elektrons in der ersten Bohrschen Bahn ist, um dann, für extrem große Geschwindigkeiten, gegen den Wert 1 zu konvergieren.

Für den Vergleich der Theorie mit der Erfahrung ist noch zu beachten, daß die Geschwindigkeit der Kanalstrahlteilchen nicht genau durch die Beziehung  $\frac{m}{2} v_p^2 = e \cdot V_{\text{Bohr}}$  gegeben ist;

Beobachtungen des Dopplereffektes<sup>1)</sup> und Ablenkungsversuche<sup>2)</sup> ergaben, daß die wirksame Spannung  $V_{\text{effektiv}}$  nur etwa  $\frac{2}{3}$  der angelegten Röhrenspannung beträgt.

Außerdem ist zu berücksichtigen, daß stets vorhandene Verunreinigungen die Polarisation schwächen.

Von den Beobachtungen seien zunächst die Messungen von Frl. Lub (a. a. O.) besprochen, deren Ergebnis wir schon in der Einleitung bei unseren qualitativen Überlegungen verwendeten. Sie beobachtet die Polarisation des Kanalstrahllichts unter Winkeln  $\alpha$ , die wenig von der zum Kanalstrahl senkrechten Richtung abweichen. Diese hängt mit der von uns berechneten Polarisation  $P$  zusammen durch

$$(18) \quad (P_{\alpha} - 1) = (P - 1) \cdot \sin^2 \alpha.$$

Trennung der bewegten von der ruhenden Intensität ermöglicht der Dopplereffekt; die Verschiebung ist proportional zu  $\cos \alpha$ . Um die Polarisationen der ruhenden und bewegten Intensität getrennt zu beobachten, wählt Frl. Lub den Beobachtungswinkel  $\alpha$  so, daß Dopplereffekt und Polarisation zugleich möglichst groß sind. Zum quantitativen Vergleich der Messungen mit der Theorie haben wir die beobachteten Polarisationen<sup>3)</sup> unter den Winkeln  $64^\circ$  und  $74^\circ$ ,  $P_{64}$  und  $P_{74}$ , auf die Polarisation unter rechtem Winkel,  $P$ , umzurechnen. Es ergibt sich für  $P$

	der Linien	$H_{\beta}$	$H_{\gamma}$	$H_{\delta}$
aus den Messungen unter	$\left\{ \begin{array}{l} 64^\circ \\ 74^\circ \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,68 \\ 1,69 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,43 \\ 1,69 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,31 \\ 1,56 \end{array} \right.$

Die Polarisation  $P$  muß, nach Korrektur der Schwächung entsprechend dem Winkelgesetz (18), unabhängig vom Beobachtungswinkel sein. Die an  $H_{\gamma}$  und  $H_{\delta}$  deutlich hervortretende Verschiedenheit von  $P$  aus  $64^\circ$ - und  $74^\circ$ -Messungen kann wohl, wie Frl. Lub mir auf Anfrage freundlichst mitteilte, darauf zurückgeführt werden, daß die beobachtete Kanalstrahlstelle in den  $64^\circ$ -Messungen weiter vom Entladungsrohr entfernt war als in den  $74^\circ$ -Messungen; das bekannte<sup>4)</sup> Abklingen der Polarisation mit dem Abstand vom Schlitz erklärt die zu niedrigen  $64^\circ$ -Werte.

Auch in den Messungen unter  $74^\circ$  wird schon ein Teil

1) R. v. Hirsch u. R. Döpel, Ann. d. Phys. [5] 1. S. 963. 1929.

2) R. Döpel, a. a. O.

3) W. A. Lub, a. a. O., Tab. IV u. V. Konstante Spannung.

4) Etwa bei R. Döpel u. R. v. Hirsch, a. a. O. u. Phys. Ztschr. 29. S. 394. 1928, ferner J. Stark, Axialität der Lichtemission und Atomstruktur, Berlin 1927, S. 71.

der Polarisation abgeklungen sein; die unabgeklungene Polarisation wird noch ein wenig höher liegen müssen.

In Fig. 2 haben wir die theoretische Kurve für die Balmerserie noch einmal gezeichnet, wobei der Abszissenmaßstab auf das Zehnfache vergrößert ist, und haben zum Vergleich dazu die auf  $90^\circ$  umgerechneten Meßpunkte der Arbeit von Fräulein Lub<sup>1)</sup> eingetragen. Sie liegen stets merklich unterhalb der theoretischen Kurve, zeigen jedoch die von der Theorie geforderte Abnahme der Polarisation mit wachsender Geschwindigkeit. — Ältere Messungen von Weigl<sup>2)</sup> sowie Döpel und v. Hirsch<sup>3)</sup>, welche ruhende und

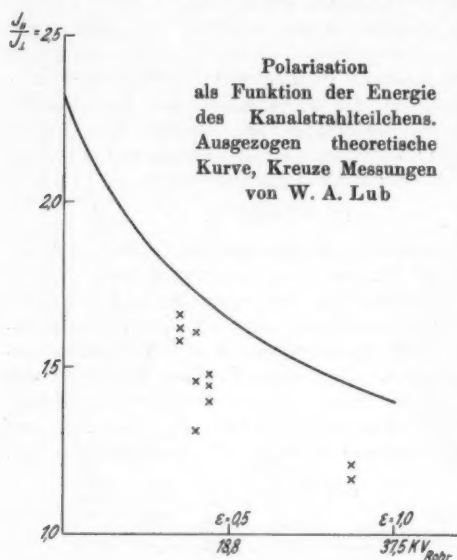


Fig. 2

bewegte Intensität nicht voneinander getrennt haben, bestätigen gleichfalls diesen Verlauf.

Zusammenfassend können wir feststellen: Unsere Theorie lieferte für den elektrischen Vektor der Strahlung die Bevorzugung der Kanalstrahlrichtung; auch den Grad der Bevorzugung, der durch die Polarisation gemessen wird, erhalten wir in richtiger Größenordnung. Die beobachtete Abhängigkeit der Polarisation von der Spannung wurde in ihrem Verlauf qualitativ von der Theorie wiedergegeben.

#### Anhang

Wir haben in § 1 festgestellt, daß die angeregten Wasserstoffatome in Wirklichkeit nicht durch Einfangung, sondern

1) W. A. Lub, a. a. O., Tab. VII. Variable Spannung.

2) A. Weigl, Ann. d. Phys. [4] 82. S. 1. 1927.

3) R. Döpel u. R. v. Hirsch, a. a. O.

durch Stoß entstehen. Wir wollen daher die bei Stoßanregung zu erwartende Polarisation qualitativ diskutieren und mit der Polarisation bei Einfangung vergleichen.

Wir nehmen zunächst idealisierend an, die Anregung geschehe durch Zusammenstoß mit einem *Elektron* (oder Proton). Für diesen Fall ist die Polarisation zuerst von Skinner und Appleyard<sup>1)</sup>, zuletzt von Bethe (a. a. O.) eingehend diskutiert worden. Besonders einfach ist der Fall, daß die Relativgeschwindigkeit von stoßendem Elektron und gestoßenem Atom nach dem Stoß Null ist: Dann muß der Drehimpuls des Atoms um die ursprüngliche Flugrichtung des Elektrons beim Stoß ungeändert bleiben. Da das Wasserstoffatom vor dem Stoß im Grundzustand ist, muß also die magnetische Quantenzahl nach dem Stoß  $m=0$  sein, wenn man den Spin vernachlässigt, bzw.  $m = \pm \frac{1}{2}$  bei Berücksichtigung des Spins.

Daraus ergibt sich folgendes für die Polarisation:

1. Lymanserie. a) Ohne Spin: Im Endzustand ist  $l'=0$ , also im angeregten Zustand  $l=1$  ( $p$ -Term). Beim Übergang vom Zustand  $l=1, m=0$  nach  $l'=m'=0$  wird Licht ausgesandt, welches vollständig in Richtung des Kanalstrahls polarisiert ist,  $P = \infty$ .

b) Mit Spin: Im angeregten Zustand kann  $j = \frac{1}{2}$  oder  $\frac{3}{2}$  sein. Beim Übergang von  $j = \frac{1}{2}$  in den Grundzustand ( $j'=0$ ) entsteht unpolarisiertes Licht ( $J_{\parallel} = J_{\perp} = J$ , wenn die gesamte ausgestrahlte Intensität  $3J$  ist). Beim Übergang von  $j = \frac{3}{2}$ ,  $\mu = \pm \frac{1}{2}$  aus beträgt die Polarisation<sup>2)</sup>

$$P = \frac{2j+1}{j-\frac{1}{2}} = 4.$$

Da die Gesamtintensität dieses Übergangs doppelt so groß ist, wie die des Übergangs von  $j = \frac{1}{2}$  (also  $6J$ ), entfallen  $\frac{4}{6} \cdot 6J = 4J$  auf Polarisation parallel dem Kanalstrahl und  $J$  auf senkrechte Polarisation. Der Polarisationsgrad der beiden Feinstrukturlinien zusammen ergibt sich zu

$$P = \frac{J+4J}{J+J} = 2,50 \text{ gegen } 1,96$$

bei Einfangung.

2. Balmerserie: Im Endzustand kann  $l'=0$  oder  $l'=1$  sein. Im ersten Fall muß der angeregte Zustand die Azimutalquantenzahl  $l=1$  haben, die Rechnung geht wie bei der Lymanserie, ergibt also  $P = 2,50$ .

1) H. W. B. Skinner u. T. S. Appleyard, Proc. Roy. Soc. London A. 117. S. 224. 1928.

2) H. Bethe, a. a. O. Formel (54, 6).

Für  $l' = 1$  kann  $l = 0$  oder 2 sein. Für  $l = 0$  wird das ausgestrahlte Licht unpolarisiert. Für  $l = 2$  ergibt eine zur Lymanserie analoge Rechnung

$$P = \frac{3,33 J + 0,07 J + 5,40 J}{0,83 J + 0,42 J + 1,80 J} = 2,88.$$

Dabei bezieht sich die erste Zahl in Zähler und Nenner auf den Übergang  $j = \frac{3}{2} \rightarrow j' = \frac{1}{2}$ , die zweite auf  $j = \frac{3}{2} \rightarrow j' = \frac{3}{2}$ , die dritte auf  $j = \frac{5}{2} \rightarrow j' = \frac{3}{2}$ . Da der Übergang vom angeregten  $d$ -Term ( $l = 2$ ) zum  $2p$ -Term wesentlich stärker ist als der vom angeregten  $s$ -Term aus<sup>1)</sup>, so wird die mittlere Polarisation der Linien  $nd \rightarrow 2p$  und  $ns \rightarrow 2p$  auch ungefähr 2,50 werden, wie für die Linie  $np \rightarrow 2s$ .

Damit ergibt sich die Polarisation des Stoßleuchtens für die Balmerserie bei der „Kanalstrahlgeschwindigkeit Null“ zu 2,50, in naher Übereinstimmung mit dem Einfangungsleuchten (2,35), sie ist unabhängig von der Hauptquantenzahl des angeregten Zustandes.

Bei größerer Geschwindigkeit nimmt die Polarisation des Stoßleuchtens stark ab<sup>2)</sup>, genau wie die des Einfangungsleuchtens. Der Gang dürfte bei mäßigen Geschwindigkeiten in beiden Fällen etwa der gleiche sein, erst bei hohen Geschwindigkeiten ergibt sich ein Unterschied. Beim Stoßleuchten kehrt sich die Polarisation um, beim Einfangleuchten verschwindet sie.

Es bleibt noch die Frage, wieweit die für das Elektronenstoßleuchten gewonnenen Resultate sich auf Anregung durch Zusammenstoß mit *Wasserstoffmolekülen* übertragen lassen. Wir glauben, daß dies möglich ist unter der Voraussetzung, daß erstens das Molekül beim Stoß nicht angeregt wird, und daß es zweitens als kugelsymmetrisch betrachtet werden darf. Läßt man diese beiden Voraussetzungen fallen, so wird die Polarisation wahrscheinlich geringer. Doch bedarf dies noch genauerer Untersuchung.

Hrn. Geheimrat Sommerfeld bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit zu großem Dank verpflichtet, ihm und Hr. Dr. Maue für viele wertvolle Ratschläge bei ihrer Ausführung. Hr. Dr. Bethe danke ich insbesondere für die Hinzufügung des Anhangs über die Polarisation des Stoßleuchtens.

1) H. Bethe, a. a. O. S. 445, Abschnitt c, 1.

2) H. Bethe, a. a. O. S. 512 ff.

Bensheim, Bergstraße.

(Eingegangen 2. August 1933)

## **Über die Energieverhältnisse an Glühkathoden in dampf- und gasgefüllten Entladungsgefäßen<sup>1)</sup>**

**Von Ernst Kleiner**

(Aus dem Forschungsinstitut der AEG, Berlin-Reinickendorf)

(Mit 23 Figuren)

Inhalt: I. Fragestellung. — II. Entladungsgefäß und Aufheiz-  
effekt. — III. Energiebilanz der Kathode: a) Heizleistung; b) Verlust-  
leistung; c) Aufheizung infolge Querwiderstand; d) Austrittsarbeit;  
e) Positive Ionen; f) Bilanz. — IV. Experimentelle Untersuchungen:  
a) Die Aufheizkennlinien; b) Kathodenfall und Querwiderstand; c) Tem-  
peraturcharakteristik der Kathode. — V. Qualitative Deutung der Auf-  
heizkennlinien. — VI. Näherungsverfahren zur Ermittlung des Quer-  
widerstandes. — VII. Quantitative Überprüfung der Theorie. — VIII. Ein-  
fluß der Gasart auf die Aufheizung. — IX. Zusammenfassung.

### **I. Fragestellung**

In dampf- oder gasgefüllten Entladungsgefäßen mit Glüh-  
kathode tritt unter dem Einfluß des Anodenstromes eine Tem-  
peraturerhöhung an der Kathode auf. Dank den Fortschritten  
auf dem Gebiete des Oxydkathodenbaues können heute für den  
technischen Gebrauch Entladungsgefäße für Ströme bis zu  
1000 Amp. gebaut werden. Bei derartigen Stromstärken wird  
die zusätzliche Aufheizung der Kathoden so stark, daß die  
Entladungsgefäße infolge einer Verdampfung des Metalles im  
Oxydbelag in ihrer Brauchbarkeit beeinträchtigt werden können.  
Die Untersuchung der Erscheinung führt zur Aufstellung einer  
Energiebilanz. An Hand dieser Bilanz sollen Angaben über  
die einzelnen beteiligten Faktoren gewonnen werden, und zwar  
entsprechend den Verhältnissen, wie sie in technischen Röhren  
unter Betriebsbedingungen vorliegen.

### **II. Entladungsgefäß und Aufheizeffekt**

Die untersuchten Gefäße sind in ihrer konstruktiven Aus-  
gestaltung in der Literatur schon wiederholt beschrieben  
worden.<sup>2)</sup> Sie besitzen Quecksilberdampfzuführung. Die Kathode

1) Gekürzte Dissertation T. H. Berlin.

2) z. B. A. Glaser, ETZ. 52. S. 829. 1931.

ist indirekt geheizt und besteht aus einer Wolfram-Heizspirale, einem großflächigen Emissionskörper und einem Strahlungsschutz (Fig. 1). Der Emissionskörper ist ein zylindrisches (a), fächerförmiges (b) oder tannenbaumartiges (c) Gebilde aus Nickelblech und trägt eine hochemittierende Schicht aus  $\text{BaO}$ .<sup>1)</sup>

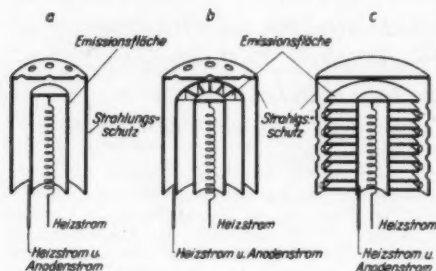


Fig. 1. Aufbau der Kathoden

Er wird durch Strahlung von der Heizspirale her auf eine Temperatur von ungefähr  $900^\circ\text{C}$  erhitzt, bei der die Oxydschicht zwar schon kräftig emittiert, ohne daß jedoch die Lebensdauer der Kathode infolge zu starker Verdampfung des Ba wesentlich beeinträchtigt wird. Seine Dimensionierung erfolgt für den im Höchstfall erforderlichen Strom. Der Strahlungsschutz ist ein zylindrischer Topf aus Nickelblech, in dessen Deckel einige Löcher für den Durchgang der Entladung angebracht sind. Ein Maß für die Güte der Wärmeabschirmung gibt die spezifische Heizleistung  $\nu_h$ , die die an der Heizspirale erforderliche Heizleistung je 1 Amp. des zulässigen Spitzenstromes darstellt. Aus konstruktiven Gründen sinkt  $\nu_h$  mit wachsender Kathodengröße. So beträgt für eine Kathodentemperatur von  $880^\circ\text{C}$   $\nu_h$  bei Gefäßen für max. 1 Amp. Belastungsstrom — 12 Watt/Amp., bei solchen für 50 Amp. — 1,7 Watt/Amp. Gleiche Energiebeträge je 1 Amp. Kathodenspitzenstrom verursachen daher bei großen Kathoden einen stärkeren Temperaturanstieg als bei kleinen. Hieraus ist es auch zu erklären, daß der Aufheizeffekt mit der Größe des Entladungsgefäßes wächst. Bei den großen Starkstromröhren kann während des Betriebes die Fremdheizung sogar völlig abgeschaltet werden.

### III. Die Energiebilanz der Kathode

Welche Erscheinungen nun im einzelnen für die Aufstellung der Energiebilanz in Frage kommen, übersieht man

1) Entgegen dem sonst üblichen Gemisch von mehreren Oxyden wurde hier zur Pastierung reines  $\text{BaO}$  benutzt, um Teilergebnisse anderer Autoren verwenden zu können.



am besten an Hand einer kurzen Betrachtung der Vorgänge, die sich beim Brennen der Entladung an der Kathode abspielen.

Zur Erzielung der erforderlichen Elektronenemission muß die Kathode durch Fremdzufuhr von Heizleistung auf eine Temperatur von  $\sim 900^\circ \text{C}$  gebracht werden. Ein Teil der Elektronen gewinnt hierbei ausreichende Temperaturenergien, um die Austrittsarbeit aus der Oxydschicht decken zu können. Die Elektronen, die außerdem vermittels ihrer Temperaturenergie die Potentialschwelle, die von der vor der Kathode vorhandenen negativen Raumladung herrührt, überwinden können, verlassen die nähere Umgebung der Kathode und gelangen in das beschleunigende Feld der Anodenspannung. Sobald sie hier auf ihrem Flug zur Anode eine gewisse Mindestgeschwindigkeit (entsprechend der Ionisierungsspannung des Füllgases) erreicht haben, kann Ionisierung erfolgen.<sup>1)</sup> Die jetzt gebildeten positiven Ionen fliegen den Elektronen entgegen zur Kathode und geben hier ihre im Kathodenfall gewonnene kinetische Energie wenigstens teilweise ab. Daneben erfolgt die Wiedervereinigung des Ions mit einem Elektron. Hierbei wird die im Ionisierungsprozeß gespeicherte Energie in Form von Strahlung wieder frei. Ein Teil davon trifft auf die Kathode und setzt sich hier in Wärme um. Einen weiteren Wärmebeitrag erfährt die Kathode infolge des Durchtrittes des Belastungsstromes durch die quer zur Strombahn liegende Oxydschicht. Da diese im Vergleich zu den Metallen einen hohen elektrischen Widerstand hat, ist die Wärmeentwicklung hier ziemlich beträchtlich.

Auf Grund dieses Überblickes kommen also folgende Glieder für die Bilanz in Frage:

a)  $N_h$  — die Heizleistung,

die der Heizspirale aus der Heizbatterie zugeführt wird.

b)  $N_v$  — die resultierende Verlustleistung

Sie setzt sich zusammen aus den Verlusten durch Strahlung und den Verlusten durch Wärmeableitung über die Zuführungsdrähte, Glaswand usw. Beide Summanden sind unter Zugrundelegung einer bestimmten Röhrentype bei gleicher Raumtemperatur nur von der Kathodentemperatur abhängig.

1) Von der Möglichkeit stufenweiser Ionisierung sei in dieser schematischen Betrachtung abgesehen.

c)  $N_q$  – Leistungszufuhr,  
herrührend von der Wärmeentwicklung beim Durchtritt  
des Belastungsstromes durch die Oxydschicht

Ist  $J_e$  – der Effektivwert des Belastungsstromes,  
 $R_q$  – der Querwiderstand der Oxydschicht,

so wird

$$(1) \quad N_q = R_q J_e^2.$$

Der Wert von  $R_q$  ist vor allem von dem Formierungszustand der Oxydschicht abhängig, und zwar nimmt er mit fortschreitender Aktivierung sehr stark ab. So wird z. B. von Meyer und Schmidt<sup>1)</sup> für BaO bei  $\sim 810^\circ \text{C}$  vor dem Formieren ein spezifischer Widerstand von  $57\,500 \, \Omega/\text{cm}$  angegeben, nach dem Formieren einer von  $203 \, \Omega/\text{cm}$ . Gegenüber diesen Unterschieden fallen die Einflüsse solcher Faktoren, wie Korngröße, Schichtdicke und Zusammensetzung der Paste nicht ins Gewicht.<sup>2)</sup>

Von Bedeutung für den Wert von  $R_q$  ist neben dem Formierungszustand nur noch die Temperatur. Für die Temperaturabhängigkeit des Querwiderstandes in formiertem Zustand ist in zahlreichen Untersuchungen<sup>3)</sup> das Exponentialgesetz

$$(2) \quad R_q = r_q e^{\frac{b}{T}}$$

bestätigt gefunden worden. Letzteres gilt nach Messung von Albricht<sup>4)</sup> sogar während des Formierungsvorganges selbst.

d)  $N_\varphi$  – Leistung zur Deckung der Austrittsarbeit  
der Elektronen

Ist  $n_-$  – die Anzahl der in der Zeiteinheit aus der Kathode austretenden Elektronen ( $\text{sec}^{-1}$ ) und

$A_\varphi$  – die Austrittsarbeit eines Elektrons in Wattsek.,

so wird

$$(3) \quad N_\varphi = n_- A_\varphi.$$

Die Anzahl  $n_-$  der austretenden Elektronen ist proportional dem Mittelwert  $M(i)$  des Belastungsstromes

$$(3a) \quad n_- = c M(i).$$

Der Proportionalitätsfaktor  $c$  enthält einerseits die Elementarladung  $e$ , andererseits den Bruchteil  $\beta$ , um den die Ionen bei der vorliegenden Gasfüllung am Stromtransport durch das Rohr beteiligt sind:

$$(3b) \quad c = \frac{1 - \beta}{e}.$$

1) W. Meyer u. A. Schmidt, *Ztschr. f. techn. Phys.* **12**, S. 137. 1932.

2) J. Kroczeck u. E. Lübke, *Wiss. Veröff. Siemens* **9**, S. 252. 1930.

3) A. Joffé u. W. C. Röntgen, *Ann. d. Phys.* **72**, S. 461. 1924; J. Spanner, *Ann. d. Phys.* **75**, S. 609. 1924; A. L. Reimann u. R. Murgoci, *Phil. Mag.* **9**, S. 7. 440. 1930; A. L. Reimann u. R. G. Treloar, *Phil. Mag.* **12**, S. 7. 1073. 1931; W. Meyer u. A. Schmidt, *a. a. O.*

4) W. Albricht, *Physica* **11**, S. 146. 1931.

Die Austrittsarbeit wird üblicherweise nicht wie hier in Wattsek. ( $A_\varphi$ ), sondern in Volt ( $\varphi_A$ ) angegeben. Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen ist gegeben über die Gleichung

$$(4) \quad A_\varphi = s \varphi_A.$$

$\varphi_A$  ist eine Materialkonstante der Oxydschicht und wiederholt für BaO gemessen worden. Die Werte liegen meist zwischen 1 und 2 Volt. Verschiedenheiten im Formierungszustand können nach Ergebnissen von Lübke und Krocze<sup>1)</sup> zu Schwankungen von  $\varphi_A$  von ungefähr 0,5 Volt führen.

Setzt man (3b) in (3a) ein und das Ergebnis mit (4) in (3), so erhält man

$$(5) \quad N_\varphi = (1 - \beta) M(i) \varphi_A.$$

Bis jetzt ist nur die reine Ablösearbeit der Elektronen in Betracht gezogen worden. Die Elektronen treten aber im allgemeinen nicht mit der Geschwindigkeit 0 aus, sondern besitzen infolge ihrer Temperaturenergie alle möglichen Geschwindigkeiten entsprechend einer Maxwell'schen Verteilung um die häufigste Voltgeschwindigkeit  $E_T$ . Ferner haben sie unterhalb des Sättigungsstromes infolge der negativen Raumladung vor dem endgültigen Verlassen der Kathode gegen eine negative Potentialdifferenz  $E$  anzulaufen. Unter Berücksichtigung dieser Faktoren ergibt sich nach einer Rechnung von H. Rothe<sup>2)</sup> für  $N_\varphi$ :

$$(6) \quad N_\varphi = (1 - \beta) M(i) (\varphi_A + E_T + E).$$

$E_T$  ist gegeben durch  $E_T = 0,861 T \cdot 10^{-4}$  Volt, worin  $T$  — die absolute Temperatur der Kathode ist. Im betrachteten Meßbereich zwischen 875 und 1000° C (1198—1273° K) ändert sich  $E_T$  nur von 0,099 auf 0,109 Volt.  $E$  bestimmt sich aus dem Anlaufstromgesetz

$$i = i_s e^{-\frac{E}{E_T}}.$$

Bei  $\frac{1}{6}$  des Sättigungsstromes ( $\frac{i}{i_s} = 0,2$ ) und  $T = 1198^\circ \text{K}$  ergibt sich:

$E = 0,159$  Volt. Im Sättigungsfalle ( $\frac{i}{i_s} = 1$ ) ist  $E = 0$ . Zur Vereinfachung mögen für  $E_T$  und  $E$  die mittleren Werte innerhalb des Meßbereiches,  $\bar{E}_T = 0,104$  und  $\bar{E} = 0,08$  Volt, eingeführt und diese mit  $\varphi_A$  zu einer Konstanten

$$\varphi_- = \varphi_A + \bar{E}_T + \bar{E}$$

zusammenggezogen werden. Man begeht hierbei, bezogen auf ein  $\varphi_A = 1,4$  Volt, an den Rändern des Meßbereiches einen Fehler von  $\sim 5,5\%$ . Gegenüber der Unsicherheit, die in  $\varphi_A$  selbst steckt, ist diese Ungenauigkeit jedoch bedeutungslos.

Man erhält jetzt endgültig für (6):

$$(7) \quad N_\varphi = (1 - \beta) M(i) \cdot \varphi_-.$$

1) J. Krocze<sup>1)</sup> u. E. Lübke, a. a. O.

2) H. Rothe, Ztschr. f. Phys. 36. S. 737. 1926.

e)  $N_J$  - Aufheizung durch positive Ionen

Dieser Betrag setzt sich aus folgenden zwei Anteilen zusammen:

1. der beim Aufprall auf die Kathode in Wärme umgewandelten kinetischen Energie  $N_{Jk}$ ,
2. der Wiedervereinigungsenergie der Ionen  $N_{JW}$ .

1. Die kinetische Energie  $N_{Jk}$ 

Zur Erläuterung von  $N_{Jk}$  werde von der kinetischen Energie  $K$  eines einzelnen Ions ausgegangen. Nach Durchlaufen der Potentialdifferenz  $U$  ist

$$K = e U.$$

Bezeichne ich mit  $n_+$  die Anzahl der in der Zeiteinheit auf die Kathode auftreffenden Ionen, so ergibt sich für die zugehörige kinetische Energie:

$$N = n_+ K = n_+ e U.$$

Dieser Betrag kommt jedoch nur zum Teil der Kathode zugute. Die Ionen geben nämlich beim Aufprall im Mittel nicht ihre gesamte kinetische Energie ab, sondern führen nach Ablauf des Wiedervereinigungsprozesses einen Bruchteil derselben wieder mit sich fort. Der Bruchteil der von der Kathode aufgenommenen Energie ist durch den Anpassungskoeffizienten  $a$  gegeben. Unter Berücksichtigung von  $a$  ergibt sich für die der Kathode infolge des Ionenaufpralles zugeführte Leistung:

$$(8) \quad N_{Jk} = a n_+ K = a n_+ e U.$$

Die Anzahl  $n_+$  ist analog  $n_-$  wieder darstellbar durch den Ionenanteil  $\beta$ , die Elementarladung  $e$  und den Strommittelwert  $M(i)$ :

$$(9) \quad n_+ = \frac{\beta}{e} M(i).$$

Unter Zusammenfassung von (8) und (9) ergibt sich für  $N_{Jk}$ :

$$(10) \quad N_{Jk} = a \beta M(i) U.$$

Der Akkomodationskoeffizient  $a$  ist von van Voorhis und Compton<sup>1)</sup> auf Grund von Energiebilanzen an einem Molybdänkollektor ermittelt worden. Sie fanden bei einer Teilchengeschwindigkeit entsprechend einer Spannung von 20–50 Volt folgende Werte: Für He  $a = 0,35$ , für Ar  $a = 0,75$ . Extrapolierend kommen sie zu dem Ergebnis, daß sich der Anpassungskoeffizient mit zunehmendem Molekulargewicht des Gases immer mehr dem Werte 1 nähert. Für Hg-Dampf darf man daher  $a \sim 1$  setzen. Der Einfluß von Teilchengeschwindigkeit, Gasdruck und Oberflächenbeschaffenheit des Kollektors auf  $a$  ist noch nicht näher untersucht.

Zahlenmäßige Angaben über  $\beta$  direkt an der Kathodenoberfläche liegen für Glühkathoden meines Wissens nicht vor. Die vorliegenden Werte beziehen sich nur auf kalte Kathoden. So ergibt sich bei de Groot<sup>2)</sup> an einem Lichtbogen zwischen kalten Wolframelektroden  $\beta = \frac{1}{2}$ . Compton<sup>3)</sup> findet für den Kathodenfleck auf Quecksilber ein

1) C. C. van Voorhis u. K. T. Compton, *Phys. Rev.* **37**. S. 1596. 1931.

2) W. de Groot, *Physica* **11**. S. 307. 1931.

3) K. T. Compton, *Phys. Rev.* **37**. S. 1077. 1931.

$\beta$  im Mittel von 0,1–0,2. Doch haften auch diesen Werten große Unsicherheiten an.

Für die von den positiven Ionen durchlaufene Spannung  $U$  ist der Kathodenfall einzusetzen, da die Ionen den Dunkelraum wegen seiner geringen Dicke größtenteils frei durchfallen.<sup>1)</sup>

## 2. Die Wiedervereinigungswärme $N_{JW}$

Das auf die Kathode auftreffende Ion gibt bei seiner Wiedervereinigung zu einem neutralen Molekül die im Ionisierungsprozeß gespeicherte Energie  $V_i$  in Form von Strahlung wieder frei. Hierbei trifft nur ein Bruchteil  $r \cdot V_i$  direkt auf die Kathode<sup>2)</sup>, während der Betrag  $(1 - r) V_i$  abgestrahlt wird. Wegen des allseitigen Strahlungsschutzes kann jedoch bei den untersuchten Kathoden  $r \sim 1$  gesetzt werden. Das zur Wiedervereinigung herangezogene Elektron hat bei seinem Austritt aus der Kathode dieser einen der Austrittsarbeit  $\varphi_-$  gleichen Energiebetrag entzogen. Faßt man diesen Energieentzug mit der freiwerdenden Ionisierungsenergie zusammen, so erhält man für die der Kathode je 1 Ion zugute kommende Wiedervereinigungsenergie  $\varphi_+$ :

$$\varphi_+ = V_i - \varphi_-.$$

Für den gesamten Ionenanteil gilt dann

$$(11) \quad N_{JW} = \beta M(i) (V_i - \varphi_-).$$

Kondensationswärme im Fall von Kondensation von Quecksilberdampfteilchen an der Kathode braucht hier im Gegensatz zu flüssigen Kathoden nicht in Betracht gezogen werden.

Zieht man (10) und (11) zusammen, so ergibt sich für  $N_J$ :

$$(12) \quad N_J = \beta M(i) (a U + V_i - \varphi_-).$$

## f) Die Bilanz

Zur Aufstellung der Bilanz aus den in den Abschnitten a) bis e) besprochenen einzelnen Energieanteilen mögen diese noch einmal kurz ihrer Herkunft nach zusammengestellt werden.  $N_v$  und  $N_\varphi$  bewirken eine Abkühlung der Kathode,  $N_h$  kommt aus der Heizbatterie,  $N_q$  und  $N_J$  schließlich werden aus dem Anodenkreis gedeckt. Im Gleichgewichtsfalle erhält man dann bei einem Bilanzschema

$$\text{zugeführte Leistung} = \text{abgeführte Leistung}$$

folgende Gleichung:

$$N_h + N_q + N_J = N_v + N_\varphi,$$

oder umgestellt

$$(13) \quad N_v - N_h = N_q + N_J - N_\varphi.$$

1) Energieverluste der Teilchen infolge von Zusammenstößen im Kathodenfall sind vernachlässigbar, da die freien Weglängen bei den vorliegenden Gasdichten größer sind als die Dicke des Fallraumes.

2) K. T. Compton u. J. Langmuir, Rev. of mod. Phys. 2. S. 183. 1930.

Die linke Seite der Gleichung stellt die Größe der zusätzlichen Heizleistung dar, rechts stehen die Faktoren, die auf Grund des Entladungsprozesses den Temperaturanstieg verursachen. Setzt man jetzt die abgeleiteten Beziehungen (1), (7) und (12) in (13) ein, so ergibt sich unter Zusammenfassung der beiden mittelwertabhängigen Glieder  $N_J$  und  $N_\varphi$ :

$$(14) \quad N_e - N_h = R_q J_e^2 + M(i) (a\beta U + \beta V_i - \varphi_-).$$

Die beiden Glieder mit  $\varphi_-$  aus Gl. (7) und (12) heben sich bei der Zusammenziehung heraus, so daß in der Klammer die Austrittsarbeit  $\varphi_-$  nur mit dem Koeffizienten 1 auftritt. Dies ist ohne weiteres verständlich: Die Deckung der Austrittsarbeit ist nämlich nicht nur für den direkt am Stromtransport beteiligten Elektronenanteil  $1 - \beta$  erforderlich, sondern auch für den Elektronenanteil  $\beta$ , der zur Wiedervereinigung herangezogen wird.

In der obigen Form ist nun die zusätzliche Heizenergie in ein effektivwertabhängiges und ein mittelwertabhängiges Glied unterteilt. Das effektivwertabhängige erfaßt den Querwiderstand, das andere die Prozesse an der Oberfläche der Kathode. Man sieht, daß für den Verlauf des Aufheizeffektes das Verhältnis des Effektivwertes zum Mittelwert, d. h. die Form des Belastungsstromes (z. B. Gleich- oder Halbwellenstrom) von Einfluß ist. Führt man daher des Überblicks halber den Formfaktor  $f$

$$(15) \quad f = \frac{J_e}{M(i)}$$

ein und bezieht im weiteren die Bilanz auf den Effektivwert  $J_e$ , so bekommt man

$$(16) \quad N_e - N_h = R_q J_e^2 + \frac{1}{f} J_e (a\beta U + \beta V_i - \varphi_-).$$

#### IV. Experimentelle Untersuchungen

Die nachfolgenden Versuche sollen neben einer Untersuchung der Aufheizung der Prüfung der abgeleiteten Energiebilanz dienen. Die Kontrolle wird in einem Vergleich des gemessenen Aufheizeffektes mit den für die gleichen Verhältnisse rechnerisch ermittelten Werten bestehen. Da aber nicht für alle in der Bilanz vorkommenden Größen die nötigen quantitativen Unterlagen vorhanden sind, so müssen diese erst durch einige zusätzliche Versuche gewonnen werden. Es wird daher auf die Messung der Aufheizung eine Untersuchung über den Kathodenfall und den Querwiderstand folgen. Ferner wird

noch eine Eichmessung gebracht, die es gestattet, bei einer bestimmten Kathodentype von der Kathodentemperatur auf den entsprechenden Energiebedarf überzugehen.

#### a) Die Aufheizkennlinien

Die Erfassung des Aufheizeffektes erfolgt durch Aufnahme des Zusammenhanges zwischen der Kathodentemperatur  $t_k$  und dem Anodenstrom  $i$ , und zwar sollen die Kennlinien in Anlehnung an Gl. (16) auf den Effektivwert  $J_e$  bezogen werden.

$$t_k = f(J_e).$$

Um den Einfluß des  $M(\dot{v})$ -Gliedes klarzulegen, werden die Messungen bei verschiedenen Formfaktoren wiederholt.

#### 1. Die Meßanordnung

Die benutzte Schaltung (Fig. 2) muß neben der Messung des Belastungsstromes und der Bestimmung seines Formfaktors eine genaue Konstanthaltung der zugeführten Heizleistung ermöglichen, da sonst der Aufheizeffekt nicht sauber erhalten werden kann.

Die Heizung wurde aus einer Akkumulatorbatterie gespeist, die der Heizspirale zugeführte Leistung mit dem dynamometrischen Leistungsmesser  $W_h$  überwacht. Zu beachten ist, daß sich mit dem Belastungsstrom auch der Heizstrom ein wenig ändert. Dies hat zweierlei Ursachen. 1. Infolge des Temperaturanstieges an der Kathode steigt der Widerstand des Heizfadens. 2. Der Belastungsstrom geht nicht ausschließlich über die dafür vorgesehene Leitung  $HK$ , sondern verteilt sich entsprechend dem Verhältnis der Widerstände auf die beiden Wege  $HK$  und  $H$ . Der Strom im Heizfaden besteht daher aus dem eigentlichen Heizgleichstrom und einem überlagerten Anodenstromanteil. Der Effektivwert des resultierenden Spiralenstromes konnte an einem dynamometrischen Strommesser  $A_h$  abgelesen werden. Infolge dieser beiden Erscheinungen war für jeden Meßpunkt ein Nachregeln der Heizung erforderlich ( $R_h$ ).

Der Anodenkreis enthielt außer einem veränderlichen Belastungswiderstand  $R_B$  Instrumente zur Messung des Mittel- und des Effektivwertes des Belastungsstromes. Für das erste

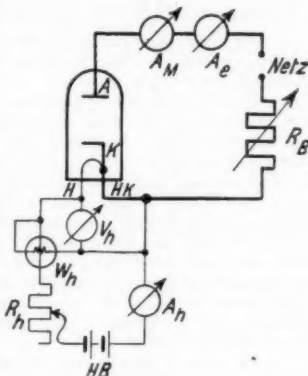


Fig. 2. Schaltung zur Aufnahme der Aufheizkennlinien



wurde ein Drehspulinstrument  $A_M$  benutzt, für das zweite war ein Instrument erforderlich, dessen Anzeige unabhängig vom Formfaktor ist, wie z. B. ein Dynamometer ( $A_e$ ). Durch  $M$  ( $i$ )

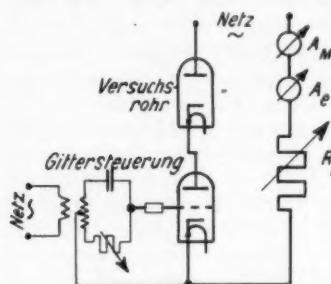


Fig. 3. Schaltung zur Veränderung des Formfaktors

und  $J_e$  ist dann der Formfaktor  $f$  gegeben.  $f$  konnte geändert werden einerseits durch Benutzung verschiedener Spannungsarten als Anodenspannung (Gleich-, Wechselspannung), andererseits durch Betätigung eines gittergesteuerten Gleichrichters, der mit dem Versuchsrohr in Reihe geschaltet war (Fig. 3). Für Gleichstrom ist  $f = 1$ , für Halbwellenstrom  $f = \frac{\pi}{2}$ . Größere Form-

faktoren erreicht man mit Hilfe der Gittersteuerung.

Die Messung der Kathodentemperatur erfolgte mit einem Glühfadenpyrometer von S. & H. unter Benutzung einer Rotblende von  $0,65 \mu$ . Das Pyrometer läßt sich mit ausgerichtetem Auge bei Temperaturen um  $1000^\circ \text{C}$  auf  $3^\circ$  genau abgleichen. Ob ein Abschalten des Lichtbogens zur Ausführung der Messung erforderlich ist, hängt von dem Spektrum der Entladung ab. Spektren mit energiereichen Rotlinien können das Ergebnis wesentlich fälschen. Daher muß bei Verwendung von Ar und He als Füllgas die Entladung abgeschaltet werden. Bei Hg-Dampffüllung erwies sich dies jedoch als unnötig. Das ist für die Ausführung der Messung sehr günstig. Durch den Fortfall des Abschaltens bleibt nämlich die Kontinuität der Versuchsbedingungen viel besser gewahrt, und es ist eine sofortige Wiederholung der Ablesungen möglich. Bei Abschalten der Entladung dagegen gestaltet sich die Messung infolge des schnellen Abkühlens der Kathode recht langwierig, da man sich mit der Einstellung des Pyrometers nur schrittweise der eigentlichen Kathodentemperatur nähern kann.

Auf eine Umrechnung der gemessenen schwarzen Temperatur des Emissionskörpers auf die tatsächliche wurde wegen der Geringfügigkeit des Fehlers verzichtet. Denn bei Oxydkathoden handelt es sich um Strahler, die sich im roten Teil des Spektrums fast wie schwarze Körper verhalten<sup>1)</sup>, und die Korrektur für Strahler hohen Schwärzgrades ist sehr gering.<sup>2)</sup> Zudem wird der Schwärzgrad des Emissionskörpers durch den allseitigen Strahlungsschutz noch weiter erhöht.

Bei der Auswahl der Meßstelle auf der Kathode ist zu beachten, daß die Glühkathode wegen ihrer großen Ausdehnung nicht auf der gesamten Oberfläche die gleiche Temperatur aufweist. Der Vergleichs-

1) H. D. Arnold, Phys. Rev. 16. S. 70. 1920.

2) Vgl. Eichkurve für Glühfadenpyrometer in „Berichte des Ausschusses des Vereins deutscher Eisenhüttenleute“ Mitteilung der Wärme- stelle Nr. 96. S. 711.

möglichkeit halber muß daher die zu Beginn der Messung mit dem Pyrometer anvisierte Stelle durchweg beibehalten werden.

Die Raumtemperatur muß zur Aufrechterhaltung konstanter Abstrahlungsverhältnisse auf die Dauer der Versuche möglichst unverändert bleiben.

## 2. Die Messung

Die Messungen wurden im allgemeinen nur für die beiden Formfaktoren  $f = 1$  und  $f = \frac{\pi}{2}$  ausgeführt. Diese Werte entsprechen dem Gleichstrom bzw. Halbwellenstrom und lassen sich experimentell durch Benutzung von Gleich- oder Wechselspannung als Anodenspannung leicht verwirklichen. Von den zahlreichen Messungen seien hier nur einige besonders charakteristische wiedergegeben.

Fig. 4 stellt die Aufheizkennlinie eines Gleichrichters für 6 Amp. Spitzenstrom dar. Die Kathode benötigt eine Heiz-

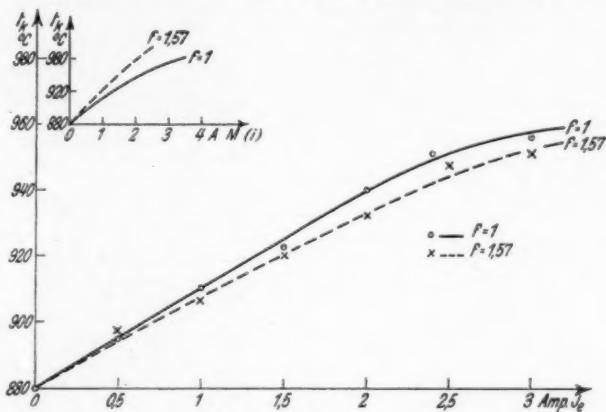


Fig. 4. Aufheizkennlinien eines 6 Amp.-Gleichrichters

leistung von  $5 \text{ Volt} \times 5 \text{ Amp.} = 25 \text{ Watt}$ . Das Rohr war noch wenig benutzt.

Fig. 5 zeigt die Ergebnisse für zwei verschiedene Rohre (R I und R II) für 50 Amp. Spitzenstrom. Zur Heizung sind 85 Watt erforderlich. Das Rohr R I war schon lange Zeit im Betrieb. Für das Rohr R II wurde neben den Reihen  $f = 1$  und  $f = \frac{\pi}{2}$  unter Benutzung der in Fig. 3 angegebenen Schaltung noch eine Reihe bei Viertelwellenstrom aufgenommen. Dieser entsprach einem Formfaktor  $f = 2,2$ .

Die tatsächlich gemessenen Formfaktoren waren infolge des Spannungsabfalles am Rohr etwas größer als die theoretischen Werte. Sie betrugen bei 220 Volt ungefähr  $f = 1,6$ .

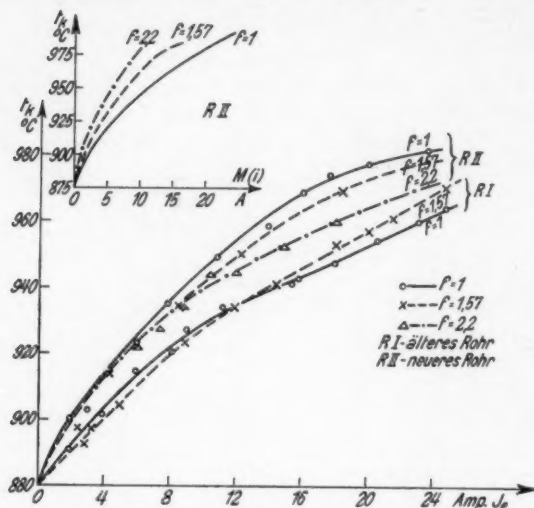


Fig. 5. Aufheizkennlinien von 50 Amp.-Gleichrichtern  
R I älteres Rohr, R II neueres Rohr

### 3. Diskussion der Ergebnisse

Die Abweichung der Kurven voneinander bestätigt die theoretisch gewonnene Erkenntnis, daß sowohl der Effektivwert wie der Mittelwert des Belastungsstromes an der Aufheizung beteiligt sind. Eine nähere Deutung wird erst später erfolgen. Auf Grund eines Vergleiches der Kennlinien  $t_k = f(J_e)$  mit den im Nebenbild aufgetragenen Kurven  $t_k = f(M(\bar{i}))$  läßt sich aber schon hier aussagen, daß der Einfluß des effektivwertabhängigen Anteiles bei weitem überwiegt. Faßt man die gegenseitigen Abweichungen der Kurven bei verschiedenen Formfaktoren ins Auge, so lassen sich folgende zwei Kennlinienarten unterscheiden:

$\alpha$ ) sich schneidende Kennlinien. Bei ihnen ändert die Abweichung bei einer bestimmten Belastung ihr Vorzeichen (Fig. 5 Rohr I).

$\beta$ ) Kennlinien, die eine einsinnige Abweichung voneinander zeigen. Es ist nach dem Verlauf der Kurven jedoch nicht aus-

geschlossen, daß auch hier ein Schnitt auftreten würde, wenn der Höhe der Stromentnahme nicht durch die Belastbarkeit der Kathode eine Grenze gesetzt wäre (Figg. 4 und 5 Rohr II).

#### b) Kathodenfall und Querwiderstand

Die Messung des Potentialabfalles direkt vor der Kathode erfolgt nach der Sondenmethode von Langmuir.<sup>1)</sup> Sie erfordert die Aufnahme des Sondenstromes  $i_{s.o}$  in Abhängigkeit des Sondenpotentials  $V_{s.o}$  gegenüber der Kathode. Trägt man das Ergebnis in halblogarithmischer Form

$$\ln i_{s.o} = f(V_{s.o})$$

auf (vgl. Fig. 8), so liefert der Knickpunkt  $P$  der Kurve das Potential des Sondaufpunktes.

Das Versuchsrohr war ein normaler 6 Amp.-Gleichrichter. Die für die Messungen eingebaute Sonde war direkt über einer

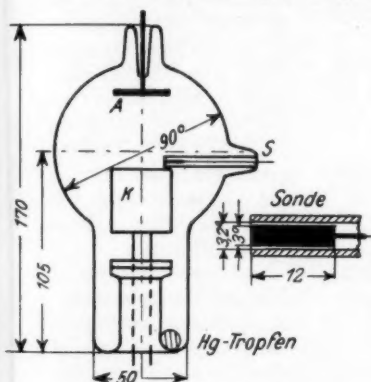


Fig. 6. Versuchsrohr mit Sonde

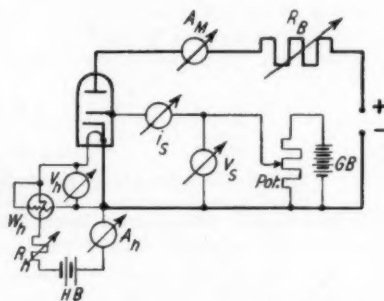


Fig. 7. Schaltung zur Aufnahme der Sondenkennlinien

Öffnung des Kathodendeckels angebracht und bestand aus einem Graphitzylinder von 3 mm Durchmesser, der von einem als Zuleitung dienenden Wolframdraht getragen wurde. Als Hülle wurde ein Hartglasröhrchen benutzt, das dicht an den Zylinder anschoß, ohne ihn jedoch zu berühren (Fig. 6). Die freibleibende Stirnfläche wirkte als ebene Sonde.

Die benutzte Schaltung ist aus Fig. 7 ersichtlich. Als Anodenspannung wurde Gleichspannung benutzt. Die Sonden-

1) J. Langmuir u. H. Mott-Smith, Gen. El. Rev. 27. S. 449. 1924.

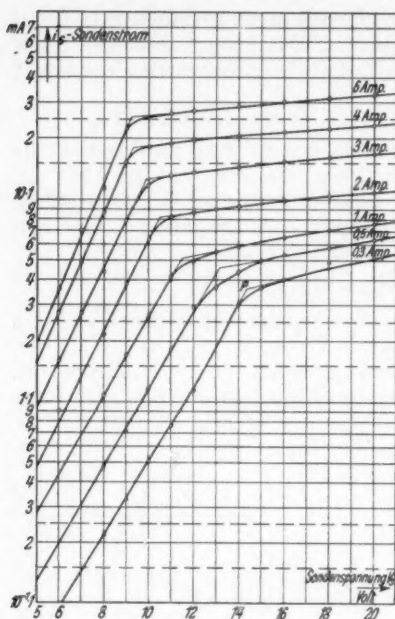


Fig. 8. Zur Bestimmung des Kathodenfalles unter normalen Betriebsbedingungen. Sondencharakteristiken bei 20 Watt Heizung

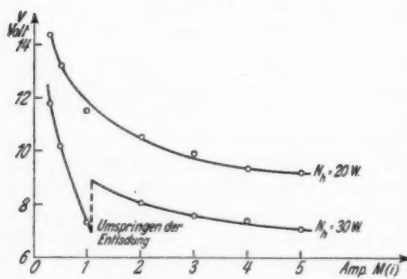


Fig. 9. Potentialdifferenz zwischen Sondenauflpunkt und Kathoden-ausführung unter Betriebsbedingungen

spannung wurde an einem Potentiometer abgegriffen, das ganz niedrigohmig gewählt war, um den Sondenstrom nicht durch den äußeren Kreis zu beeinflussen.

In Fig. 8 ist als Beispiel für diese Messungen eine Kurvenschar wiedergegeben, wie sie den Verhältnissen bei Betriebsbedingungen entspricht. Es wurde bei Leerlauf eine Heizleistung von 20 Watt entsprechend einer Kathodentemperatur von  $880^{\circ}\text{C}$  eingestellt und diese im Laufe der Messung nicht mehr nachgeregelt. Die Schar besteht aus 7 Meßreihen bei verschiedenen Belastungsströmen.

Die sich auf Grund dieser Messungen ergebende Kurve der Spannungsabfälle  $V$  zeigt die nächste Fig. 9. Sie hat mit steigender Belastung stark fallende Tendenz. Mit steigender Heizung rutscht die gesamte Kurve nach unten.

Die so gewonnenen Werte, die der Potentialdifferenz zwischen Sondenauflpunkt und der gemeinsamen Ausführung von Heiz-

faden und Emissionskörper entsprechen, decken sich nun leider nicht mit dem Kathodenfall, sondern setzen sich folgendermaßen zusammen:

1. dem eigentlichen Kathodenfall  $U$ ,
2. dem Spannungsabfall am Querswiderstand  $R_q J_e$ ,
3. dem Spannungsabfall in den Zuleitungsdrähten.

Da man den letzten Anteil gegenüber den anderen beiden vernachlässigen kann, so bleibt für  $V$ :

$$(17) \quad V = U + R_q J_e.$$

Wegen dieser Verquickung von  $U$  und  $R_q$  ist es vorläufig nicht zu entscheiden, auf welche der beiden Größen die gemessenen Veränderungen von  $V$  zurückzuführen sind. Eine direkte Messung von  $U$  und  $R_q J_e$  getrennt ist unter den vorliegenden Bedingungen nicht möglich; es soll jedoch im folgenden versucht werden, durch weitere Messungen diese Frage auf indirektem Wege zu klären.

Bei der Änderung des Belastungsstromes  $J_e$  ändert sich infolge der Aufheizung auch die Kathodentemperatur  $t_k$  und die Hg-Dampfdichte  $\rho$ . Um nun den Einfluß jeder dieser drei Größen auf  $V$  gesondert zu erhalten, werden folgende drei Meßreihen aufgenommen:

- |                        |                    |                    |
|------------------------|--------------------|--------------------|
| 1. $\rho$ — verändert, | $J_e$ — const,     | $t_k$ — const,     |
| 2. $\rho$ — const,     | $J_e$ — verändert, | $t_k$ — const,     |
| 3. $\rho$ — const,     | $J_e$ — const,     | $t_k$ — verändert. |

Die Schaltung war die gleiche wie bisher. Die Hg-Dampfdichte wurde mit Hilfe eines temperierten Ölbadcs geregelt, in dem der Fuß des Entladungsgefäßes untergebracht war. Abgesehen von dem Temperaturgefälle im Glas stimmt dann die Temperatur des Hg-Tröpfchens im Fuße mit der des Bades überein. Durch Isolierung der Anordnung gegen Wärmeabgabe und häufiges Umrühren des Öles wurde für Gleichmäßigkeit der Temperaturverhältnisse gesorgt. Es wurde ferner darauf geachtet, daß der Fuß mit dem Hg-Tröpfchen tatsächlich die kälteste Stelle des Rohres war. Dann ist der Dampfdruck im Rohre gleich dem Sättigungsdruck des Quecksilbers entsprechend der Fußtemperatur. Bei der näheren Betrachtung der Verhältnisse ist jedoch zu berücksichtigen, daß sich die Glühkathode auf einer Temperatur von 900—1000°C befindet. In ihrer unmittelbaren Umgebung ist der Dampf daher überhitzt. Um zu überschlagen, wie sich dies auf die Dampfdichte dort auswirkt, sei vorerst angenommen, daß der überhitzte Dampf im Kathoden-

fallgebiet die Temperatur der Kathode habe. Tatsächlich wird dies nicht der Fall sein, da sich infolge der Temperaturdifferenz eine Umlaufströmung im Dampf einstellen wird. Benutzt man für den überhitzten Dampf die Gesetze der idealen Gase und bezeichnet mit

$\rho_k$  — die Quecksilberdampfdichte an der Kathode,

$T_k$  — die absolute Temperatur der Kathode,

$p_k$  — den Druck im Rohre,

so ist

$$(18) \quad \frac{T_k \rho_k}{p_k} = \text{const.}$$

D. h. bei gleichbleibendem  $T_k$  bleiben  $p_k$  und  $\rho_k$  einander proportional.

*Meßreihe 1:*  $\rho$  — verändert,  $J_e$  — const,  $t_k$  — const.

Es wurden Sondenkennlinien zwischen 40 und 80° C Fußtemperatur aufgenommen. Dies entspricht einem Dichtebereich von  $1,8 \cdot 10^{-8}$  bis  $26 \cdot 10^{-8}$  g/cm<sup>3</sup>.<sup>1)</sup>  $J_e$  betrug 1 Amp.,  $t_k = 900^\circ \text{C}$ , die Heizleistung 25 Watt.

Die gewonnenen Raumpotentiale  $V$  in Abhängigkeit von der Temperatur des Quecksilbertropfens zeigt Fig. 10. In

$$V = U + R_q J_e$$

ist  $R_q J_e$  gegebenenfalls konstant, die Änderungen von  $V$  sind daher nur auf Änderungen von  $U$  zurückzuführen. Es findet also eine starke Ab-

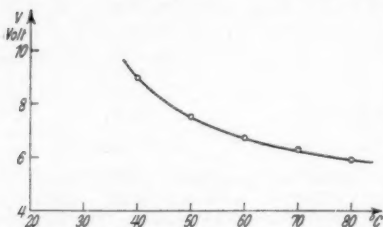


Fig. 10. Zu Meßreihe 1: Raumpotential an der Sonde in Abhängigkeit von der Temperatur des Hg-Tropfens

nahme des Kathodenfalls mit steigender Dampfdichte statt.

*Meßreihe 2:*  $\rho$  — const,  $J_e$  — verändert,  $t_k$  — const.

Aufgenommen wurden Charakteristiken zwischen 1 und 5 Amp. bei  $t_k = 915^\circ \text{C}$  und einer Hg-Temperatur von  $40^\circ \text{C}$ . Die aus ihnen gewonnenen Werte für  $V$  zeigen mit steigendem Belastungsstrom nur ein geringes Absinken, und zwar bei einer Stromzunahme von 1 auf 5 Amp. nur um 0,6 Volt. Da über eine Stromabhängigkeit von  $U$  nichts bekannt ist, ergibt sich somit ein fast konstanter Spannungsabfall am Querwiderstand. Das bedeutet, daß der Betrag von  $R_q$  mit steigender Strom-

1) Zur Umrechnung vgl. Landolt-Börnstein II, S. 1355.



stärke sinkt. Diese Erscheinung läßt sich auf zweierlei Ursachen zurückführen. Einerseits dehnt sich die Entladung mit zunehmender Stromstärke auf der Kathode aus, andererseits wird mit wachsendem Strom die Oxydschicht gründlicher durchformiert. Auf das letztere weist folgende Beobachtung hin. Bei einer plötzlichen Steigerung der Stromstärke in der Entladung steigt im ersten Augenblick der Spannungsabfall an dem Gefäß steil an. In dem Maß, wie die zusätzliche Formierung fortschreitet, fällt der Spannungsabfall wieder ab und erreicht nach einem Zeitraum von etwa 30 Sek. einen neuen Endwert. Betreibt man das Entladungsgefäß mit Wechselspannung von 50 Hz, so ist der Formierungsvorgang viel zu träge, als daß er dem Augenblickswert des Stromes nachfolgen könnte. Der sich einstellende Spannungsabfall wird in dem Takte der 50 Hz um einen Mittelwert pulsieren. Über die Größe des Querwiderstandes, der diesem Mittelwert entspricht, im Vergleich zu den Verhältnissen bei Gleichstrom, ist bei der Vielfältigkeit der hier mitspielenden Faktoren kaum etwas auszusagen.

Für die weiteren Berechnungen wird angenommen, daß die Wärmeentwicklung am Querwiderstand bei Gleich- und Halbwellenstrom die gleiche ist, sofern der Effektivwert des Halbwellenstromes  $J_e$  gleich dem durchfließenden Gleichstrom ist. Bezeichne ich mit dem Index = die zum Gleichstrom, mit dem Index  $\Delta$  die zum Halbwellenstrom gehörigen Werte, so ist nach Obigem

$$(19) \quad J_e^2 R_{q\Delta} = J^2 R_q = .$$

Da  $J_e = J$ , wird auch  $R_{q\Delta} = R_q =$ . Wir rechnen also bei Halbwellenstrom mit einem mittleren Querwiderstand  $R_{q\Delta}$ , der gleich ist dem Querwiderstand  $R_q =$  bei einem Gleichstrom von der Stärke des Effektivwertes des Halbwellenstromes. Wird daher wie bei unserer Bilanz, alles auf den Effektivwert bezogen, so erübrigen sich die Indizes bei  $R_q$ .

Meßreihe 3:  $\rho = \text{const}$ ,  $J_e = \text{const}$ ,  $t_k = \text{veränderlich}$ .

Es wurden fünf Meßreihen bei Kathodentemperaturen zwischen 920 und 1015° C aufgenommen.  $J_e$  betrug 3 Amp., die Hg-Temperatur 40° C.  $V = f(t_k)$  zeigt Fig. 11. Mit  $t_k$  ändert sich nur  $R_q$ . Die Potentialänderungen  $\Delta V$  sind daher allein auf solche von  $R_q J_e$  bzw.  $R_q$  zurückzuführen.<sup>1)</sup> Aus  $\Delta V$

1) Hierbei ist vernachlässigt, daß sich mit  $t_k$  auch die Hg-Dampfdichte vor der Kathode ändert. Die Änderung beträgt nach (18) zwischen 920 und 1015° C etwa 8%. Nach Meßreihe 1 ist der hierdurch verursachte Fehler belanglos.

läßt sich also  $\Delta R_q = f(t_k)$  bestimmen. Hiermit kann man das Exponentialgesetz (2) für die Temperaturabhängigkeit des Querwiderstandes prüfen. Denn die Ableitung einer Exponentialfunktion ist wieder eine Exponentialfunktion. Ergibt sich daher für den

$$\ln \frac{dR_q}{d\left(\frac{1}{T}\right)} = f\left(\frac{1}{T}\right)$$

eine gerade Linie, so ist damit die Gültigkeit von (2) bestätigt. In Fig. 12 ist dies ausgeführt. Die Linearität ist befriedigend gewahrt.

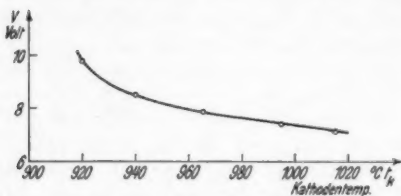


Fig. 11. Zu Meßreihe 3: Raumpotential an der Sonde in Abhängigkeit von der Kathodentemperatur

Obige Messungen lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

Der Abfall der unter Betriebsbedingungen gemessenen Potentialkurve  $V = f(J_e)$  ist im wesentlichen durch die Änderung des Kathodenfalles mit der Dampfdrucke bedingt.

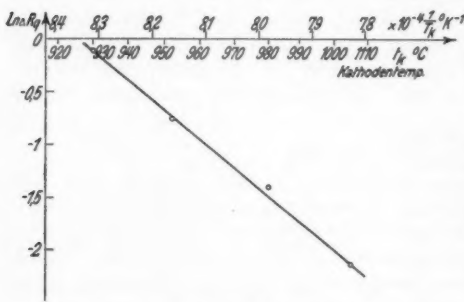


Fig. 12. Zur Prüfung der exponentiellen Temperaturabhängigkeit des Querwiderstandes

Die bei einer bestimmten Kathodentemperatur ermittelten Widerstandswerte gelten jedoch infolge der Veränderlichkeit der Strombedeckung nicht allgemein für diese Temperatur, sondern nur unter den Stromverhältnissen, für die sie ermittelt worden sind.

#### c) Temperaturcharakteristik der Kathode

Wesentlich für die Auswertung der Bilanz ist die Kenntnis des Zusammenhanges zwischen der Temperatur der Ka-

thode und der zu ihrer Aufrechterhaltung erforderlichen Leistung  $N_k$

$$t_k = f(N_k).$$

Hierzu wurde der Kathode bei abgeschalteter Entladung aus dem Heizkreis eine bestimmte Leistung zugeführt und die sich einstellende Temperatur gemessen. Gegenüber den Betriebsbedingungen weichen die geschaffenen Verhältnisse insofern ab, als hier die gesamte Heizleistung über die Spirale zugeführt wird, während dort ein Teil der Wärmeentwicklung direkt an der Kathodenoberfläche stattfand. Die Verschiedenheiten fallen aber nicht weiter ins Gewicht, da die Abstrahlungsverhältnisse sich infolge des allseitigen Strahlungsschutzes kaum ändern und das Anwachsen des abgeleiteten Anteiles vernachlässigbar ist. Man kann daher das gemessene  $N_k$  der Verlustleistung  $N_v$  aus der Energiebilanz gleichsetzen.

Der Verlauf der Temperaturcharakteristik weist in dem hier interessierenden Bereich zwischen 900 und 1000 °C einen nahezu geradlinigen Verlauf auf (Fig. 13). Der Übergang von den Aufheizkennlinien in der Form  $t_k = f(J_e)$  auf die Form  $N_k = f(J_e)$  ist somit nur eine Maßstabsfrage. Die Umrechnungszahlen ergeben sich aus dem Anstieg der Charakteristik. Es entsprechen sich für das 6 Amp.-Rohr 1° C — 0,13 Watt, für das 50 Amp.-Rohr 1° C — 0,415 Watt.

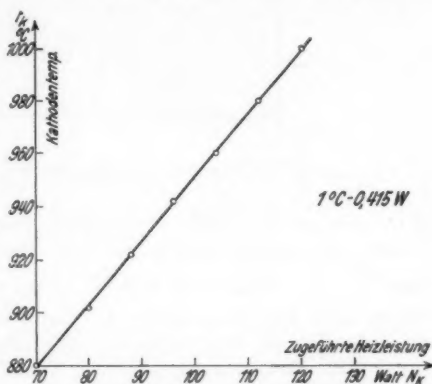


Fig. 13. Temperaturcharakteristik einer 50 Amp.-Kathode (R II)

#### V. Qualitative Deutung der Aufheizkennlinien.

Vergleicht man die gemessene Aufheizkennlinie  $N_k = f(J_e)$  mit der Kathodenbilanz in der Form

$$N_v = N_h + R_i J_e^2 + M(i)(\alpha \beta U + \beta V_i - \varphi_-),$$

so kann man sich  $N_k$ , das sich ja mit  $N_v$  deckt, aus folgenden drei Anteilen zusammengesetzt denken (Fig. 14):

1. Der zugeführten konstanten Heizleistung,
2. der Aufheizung infolge des Querwiderstandes,
3. der Aufheizung herrührend vom Mittelwertglied.

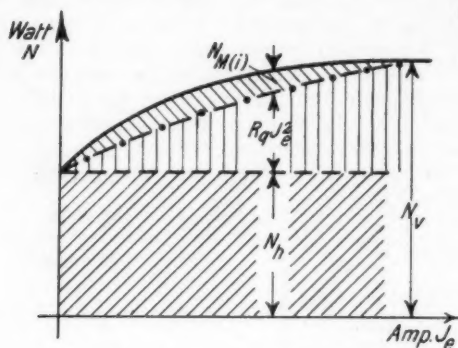


Fig. 14. Zusammensetzung der Aufheizkennlinien

Wir wenden uns jetzt der näheren Betrachtung des letzten Gliedes zu und schreiben es dazu zweckmäßig in der Form

$$(20) \quad N_{M(i)} = M(i) \{ a \beta U - (\varphi_- - \beta V_i) \}.$$

Trägt man die Summanden in der geschwungenen Klammer in Abhängigkeit von  $M(i)$  auf (Fig. 15), so ergibt sich für  $\varphi_- - \beta V_i$  eine waagerechte, für  $a \beta U$  nach den Versuchsergebnissen eine fallende Kurve. Die schraffierten Ordinaten stellen dann den Verlauf des Klammerausdruckes  $\{ \}$  dar. Multipliziert man diese Ordinaten mit dem entsprechenden  $M(i)$ , so erhält man den Verlauf des gesamten  $M(i)$ -Gliedes (Fig. 16). Bis jetzt war als Abszisse der Mittelwert aufgetragen und der Kurvenverlauf daher unabhängig vom Formfaktor. Führt man statt dessen den Effektivwert  $J_e$  ein (Fig. 17), so ist dies nicht mehr der Fall, und zwar erscheinen die Kurven in Abszissenrichtung um so stärker auseinandergezogen, je größer der Formfaktor ist. Zeichnet man jetzt in Anlehnung an Fig. 14 eine schräg ansteigende Kurve, die  $N_h + R_q J_e^2 = f(J_e)$  darstelle und überlagert ihr die oben für verschiedene Formfaktoren gewonnenen Kurven des Mittelwertgliedes, so erhält man resultierend sich überschneidende Aufheizkurven (Fig. 18) ähnlichen Verlaufes wie die gemessenen. Man begeht bei dieser Zusammensetzung theoretisch den Fehler, daß man bei einer bestimmten Abszisse den verschiedenen Aufheizkurven

trotz der abweichenden Temperaturen und Strombedeckung immer den gleichen Querwiderstand zuordnet. Wegen der Geringfügigkeit dieser Temperaturdifferenzen ist der Fehler jedoch belanglos.

Aus Fig. 18 läßt sich auch eine Erklärung für das Zustandekommen der beiden verschiedenen Typen von Aufheizkennlinien ableiten. Bei den sich schneidenden Kennlinien wird der Bereich *b* durchlaufen, bei den einsinnig übereinanderliegenden nur der Bereich *a* unterhalb des Schnittes *S*.

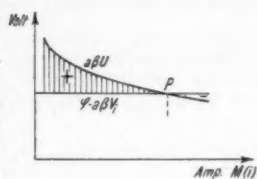


Fig. 15

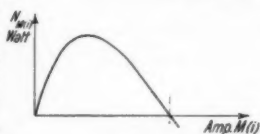


Fig. 16

#### VI. Näherungsverfahren zur Ermittlung des Querwiderstandes

Zur quantitativen Auswertung der Bilanz fehlen jetzt noch zahlenmäßige Angaben über den Kathodenfall *U* und den Querwiderstand *R<sub>q</sub>*. Wegen der Verknüpfung von *U* und *R<sub>q</sub>* in der gemessenen Größe *V* genügt es z. B. *R<sub>q</sub>* zu kennen, um auch *U* berechnen zu können.

Der hier eingeschlagene Weg zur Bestimmung von *R<sub>q</sub>* beruht auf folgendem Näherungsverfahren.

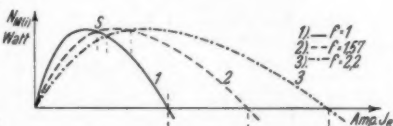


Fig. 17

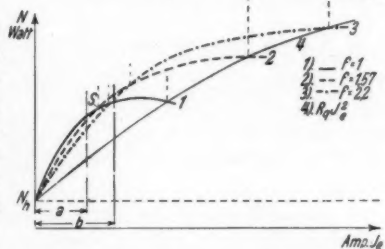


Fig. 18

Figg. 15—18.  
Zur Deutung der Aufheizkennlinien

Auf Grund des vorigen Abschnittes läßt sich, wie weiter unten gezeigt wird, für das mittelwertabhängige Glied *N<sub>M(i)</sub>* eine brauchbare Näherung angeben. Hiermit kann man dann *R<sub>q</sub>* unter Umstellung der Gl. (14) bestimmen aus

$$R_q J_e^2 = N_v - N_h - N_{M(i)}.$$

Die Näherung für  $N_{M(i)}$  ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Kurve  $N_{M(i)} = f(M(i))$  (Fig. 17) mit einem Sinushalbbogen. Wir setzen also

$$N_{M(i)} = A \sin(\gamma M(i)).$$

Bezieht man den Ausdruck auf  $J_e$  als Abszisse, so wird bei einem Formfaktor  $f$

$$N_{M(i)} = A \sin\left(\frac{1}{f} \gamma J_e\right).$$

Bei Gleichstrom wird dann  $N_{M(i)} = A \sin(\gamma J_e)$ , bei Halbwellenstrom  $N_{M(i)} = A \sin(0,64 \gamma J_e)$ .

Die Konstante  $\gamma$  bestimmt sich z. B. bequem aus dem Schnittpunkt der beiden Sinuskurven ( $S'$ , Fig. 19), der dem Schnittpunkt  $S$  der Aufheizkennlinien (vgl. Fig. 17) entspricht.

$$A \sin(\gamma J_{e0}) = A \sin(0,64 \gamma J_{e0}) \quad \gamma J_{e0} = 110^\circ.$$

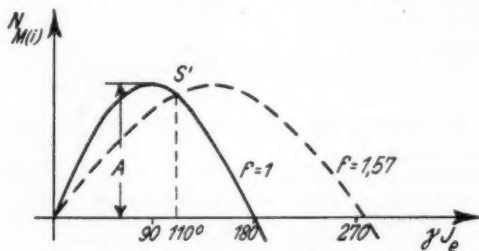


Fig. 19. Zum Sinusansatz für das Mittelwertglied

Die Amplitude  $A$  erhält man aus der Differenz der beiden Sinuskurven, die für eine beliebige Abszisse  $J_e$  den gemessenen Aufheizkennlinien entnommen werden kann.

$$\Delta N = A \sin(\gamma J_e) - A \sin(0,64 \gamma J_e),$$

$$A = \frac{\Delta N}{\sin(\gamma J_e) - \sin(0,64 \gamma J_e)}.$$

Als Beispiel werde das Verfahren auf das Rohr I für 50 Amp. Spitzenstrom angewendet. Nach Fig. 5 liegt hier der Schnittpunkt  $S$

Tabelle 1

1	2	3	4	5	6	7
$J_e$	$N_{M(i)} =$	$N_{M(i)\Delta}$	$\Delta N$	$J_e^2 R_q$	$J_e R_q$	$R_q$
4	1,89	1,23	0,66	7,5	1,88	0,470
8	3,15	2,35	0,80	14,3	1,78	0,223
12	3,35	3,18	0,17	19,7	1,62	0,137
16	2,41	3,39	- 0,10	24,4	1,52	0,095
20	0,65	3,23	- 2,57	30,0	1,50	0,075
24	- 1,33	2,58	- 3,91	36,0	1,50	0,062

bei  $J_e = 13$  Amp. Also wird  $\gamma = 8,45$  Grad/Amp. Zur Bestimmung der Amplitude  $A$  greife ich die Werte der Aufheizkurven bei  $J_e = 6,5$  Amp. heraus. Hier beträgt ihre Differenz ungefähr  $2^\circ \text{C}$ . Bei einem Umrechnungsverhältnis von 1 Watt  $- 2,4^\circ \text{C}$  entspricht dies 0,835 Watt. Es ist daher  $\Delta N = 0,835$  und  $A = 3,4$  Watt. Mit diesen Zahlen erhält man vorstehende Auswertungstabelle.

Die Ergebnisse der Auswertung sind in Fig. 20 dargestellt. Die strichpunktierte Kurve (---) wird durch Subtraktion des errechneten  $\Delta N$  von der gemessenen Gleichstromaufheizkennlinie gewonnen, und

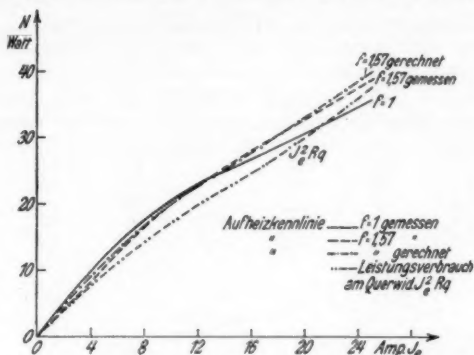


Fig. 20. Angenäherte Auswertung der Aufheizkennlinien des 50 Amp.-Rohres I

sollte sich mit der gemessenen Aufheizkennlinie für Halbwellenstrom decken. Die Übereinstimmung ist zufriedenstellend. Durch Abzug des Mittelwertgliedes von der Gleichstromaufheizkennlinie ergibt sich der Leistungsbetrag am Querwiderstand  $J_e^2 R_q$ , Spalte 5 der Tabelle. Der daraus ermittelte Spannungsabfall am Querwiderstand  $J_e R_q$  ist in Spalte 6 wiedergegeben. Er nimmt mit steigender Belastung von 1,9 auf 1,5 Volt ab.  $R_q$  selbst zeigt Spalte 7.

## VII. Quantitative Überprüfung der Theorie

Zur Prüfung der Theorie soll jetzt die gegenseitige Abweichung der Aufheizkennlinien bei Gleich- und Halbwellenstrom berechnet und die gewonnenen Werte mit denen aus den Messungen verglichen werden. Schreibt man das mittelwertabhängige Glied in der Form

$$(21) \quad N_{M(f)} = \frac{1}{f} J_e \{ a \beta U - (\varphi_- - \beta V_i) \},$$

so ergibt sich die Abweichung einer Aufheizkennlinie bei dem Formfaktor  $f$  gegenüber einer solchen bei Gleichstrom ( $f = 1$ ) als Differenz der entsprechenden Mittelwertglieder zu

$$(22) \quad \Delta N = J_e \left\{ a \beta \left( U_- - \frac{1}{f} U_A \right) - \left( 1 - \frac{1}{f} \right) (\varphi_- - \beta V_i) \right\}.$$



Die Indizes  $=$  und  $\Delta$  bei dem Kathodenfall  $U$  weisen darauf hin, daß  $U$  infolge seiner Abhängigkeit von  $M(i)$  in beiden Fällen nicht das gleiche ist. Für  $f = \frac{\pi}{2}$  (Halbwellenstrom) folgt die Rechenformel:

$$\Delta N = J_e \{ a \beta (U_- - 0,64 U_\Delta) - 0,36 (\varphi_- - \beta V_e) \}.$$

Zur Auswertung werden folgende Zahlenwerte benutzt:

$a$  beträgt bei Quecksilberdampfzuführung:  $a \sim 1$ .

$\beta$  wird auf Grund einer überschlägigen Vorauswertung zu  $\beta = 0,13$  angenommen.

$U$  ergibt sich durch Subtraktion des ermittelten Spannungsabfalles am Querwiderstand von der gemessenen Potentialdifferenz  $V$ . In Fig. 21 stellt die obere Kurve  $V$  bei

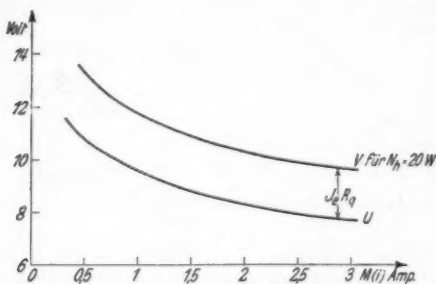


Fig. 21. Ermittlung des Kathodenfalles für das 6 Amp.-Rohr

einer Heizleistung von 20 Watt dar, wie sie bei dem untersuchten 6 Amp.-Rohr vorlag, die untere den zugehörigen Kathodenfall  $U$  nach Abzug von  $R_q J_e$ , das wir angenähert der Spalte 6 der Tab. 1 entnehmen können. Für das 50-Amp.-Rohr liegen die Verhältnisse ähnlich. Jedoch wird die Erwärmung des Rohres wegen ungünstigerer Abstrahlungsverhältnisse infolge andersartiger Konstruktion mit wachsender Stromstärke relativ langsamer steigen und damit  $U$  bedeutend flacher abfallen.  $U_-$  ist direkt aus der Kurve  $U = f(M(i))$  (Fig. 21) abzulesen. Für  $U_\Delta$  ist der dem Mittelwert des Belastungsstromes entsprechende Wert für  $U$  einzusetzen. Letzteres hängt damit zusammen, daß der Dampfdruck, der hier für  $U$  maßgebend ist, durch die Erwärmung des Kolbens bestimmt ist, und diese ihrerseits über die Verlustleistung vom Mittelwert des Stromes abhängt.

$\varphi_-$  wird mit 1,4 Volt eingesetzt.

Die Ionisationsspannung beträgt bei Hg:  $V_i = 10,4$  Volt.

Mit diesen Zahlen erhält man die Rechenausdrücke:

$$\Delta N = J_e \{0,13 (U_- - 0,64 U_A) - 0,018\},$$

$$N_{M(i)} = J_e (0,13 U_- - 0,05).$$

Für das 6-Amp.-Rohr ergibt sich hiermit folgende Auswertungstabelle.

Tabelle 2

1	2	3	4	5	6	7	8
$J_e$	$U_-$	$U_A$	$\Delta N$	$N_{M(i)}$	$J_e^2 R_q$	$J_e R_q$	$R_q$
0,5	10,8	11,6	0,21	0,68	1,3	2,6	5,2
1,0	9,6	10,3	0,37	1,20	2,7	2,7	2,7
1,5	8,9	9,7	0,50	1,65	4,2	2,8	1,87
2,0	8,4	9,2	0,63	2,04	5,7	2,85	1,42
2,5	8,0	8,85	0,73	2,50	6,8	2,70	1,08
3,0	7,7	8,4	0,87	2,87	7,3	2,45	0,82

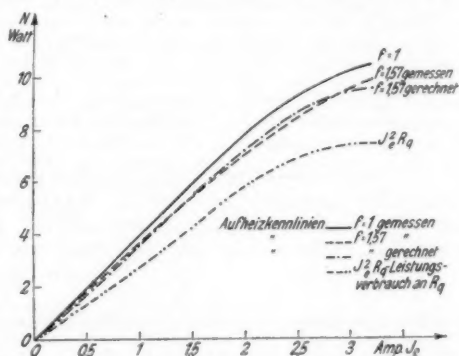


Fig. 22. Auswertung der Aufheizkennlinien des 6 Amp.-Rohres

Die Darstellung der Ergebnisse in Fig. 22 und der Weg zur Ermittlung der Werte an  $R_q$  sind die gleichen wie bei der Auswertung der Tab. 1 in Abschn. 6.  $R_q$  selbst zeigt Fig. 23. Um Vergleichsmöglichkeiten mit den Ergebnissen an anderen Rohren zu haben, ist hier  $R_q$  auf  $1 \text{ cm}^2$  Kathodenoberfläche bezogen worden. Entsprechend dient als Abszisse die Stromdichte.

Um für das 50-Amp.-Rohr RI Theorie und Versuch zur Deckung bringen zu können, ist die Annahme einer hohen

Austrittsarbeit, und zwar  $\varphi_- = 2,38$  Volt erforderlich. Zu ähnlich hohen Werten für  $\varphi_-$  muß man bei allen Röhren greifen, die sich kreuzende Aufheizkennlinien haben. Das führt zu der Vermutung, daß der Schnitt der Kennlinien ein Kennzeichen für eine schlechte Beschaffenheit der Kathode ist, die

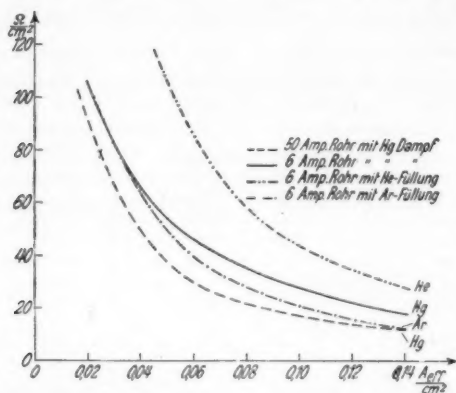


Fig. 23. Querwiderstand je  $1 \text{ cm}^2$  Kathodenoberfläche in Abhängigkeit von der Stromdichte

vielleicht von Vergiftungserscheinungen durch Fremdgase herühren kann. Die Annahme gewinnt an Wahrscheinlichkeit, da es sich bei dem vorliegenden Rohre um ein ganz altes Exemplar handelt. Die Auswertung führt zu der Tab. 3:

Tabelle 3

1	2	3	4	5	6	7	8
$J_e$	$U_-$	$U_d$	$\Delta N$	$N_{M(4)} =$	$J_e^3 R_q$	$J_e R_q$	$R_q$
4	12,0	13,0	0,44	2,12	7,5	1,86	0,465
8	10,8	11,7	0,48	2,96	14,4	1,80	0,225
12	9,8	10,8	0,10	3,00	20,0	1,66	0,138
16	9,1	10,2	-0,60	2,40	25,0	1,57	0,098
20	8,4	9,6	-1,64	1,20	30,0	1,50	0,075
24	7,8	9,2	-2,90	-0,25	34,8	1,45	0,060

Die Kurvendarstellung deckt sich fast vollkommen mit Fig. 20. Der Vergleich der Spalte 8 mit der Spalte 7 in Tab. 1 zeigt die gute Brauchbarkeit der dort benutzten Näherung.

## VIII. Einfluß der Gasart auf die Aufheizung

Um festzustellen, ob die zur Füllung benutzte Gasart auf den Aufheizeffekt von Einfluß ist, wurden die bisherigen Untersuchungen an Röhren mit Edelgasfüllung (He und Ar) wiederholt. Etwaige Änderungen müßten besonders auffällig bei He in Erscheinung treten. Denn seine Ionisierungsspannung  $V_i$  beträgt das 2,5 fache, sein Atomgewicht  $1/60$  des Wertes bei Hg. Das Wachsen von  $V_i$  wird, wie ein Blick auf Gl. (14) zeigt, ein Ansteigen des mittelwertabhängigen Anteiles an der Aufheizung zur Folge haben. Wie sich das kleinere Atomgewicht auswirken wird, ist dagegen nicht ohne weiteres zu übersehen.

Die Messungen wurden an einem mit Sonde versehenen Versuchsröhr für 6 Amp. Spitzenstrom ausgeführt, jedoch wurde dasselbe, um das Füllgas austauschen zu können, nicht von der Pumpapparatur entfernt. Zur Reinigung des Füllgases von Fremdbestandteilen (Hg-Dampf, Stickstoff usw.) war vor dem Versuchskörper eine Hilfsentladung eingebaut, mittels der Ba zum Verdampfen gebracht werden konnte.

Die Meßergebnisse zeigten bei der Auswertung eine ähnlich gute Übereinstimmung mit der Rechnung, wie wir sie schon bei Hg-Dampf gefunden haben. Es ergab sich zugleich die überraschende Tatsache, daß man den Ionenanteil  $\beta$  am Stromtransport vor der Kathode unabhängig von der Art des Füllgases immer gleich groß anzusetzen hat, und zwar genau wie bei Hg-Dampf  $\beta = 0,13$ . Ein Einfluß des Atomgewichtes auf  $\beta$  besteht also hiernach nicht. Dagegen spielt das Atomgewicht über den Anpassungskoeffizienten in die Bilanz hinein. Die sich resultierend ergebenden Mittelwertglieder wachsen bei den untersuchten drei Gasarten fast proportional mit der Ionisierungsspannung an. Dies kann man aus nachfolgender Zusammenstellung entnehmen, die die Zahlenwerte bei 3 Amp. Belastungsstrom wiedergibt.

Gasart	Hg	Ar	He
$N_M(i)$ (Watt)	2,85	4,3	7,65
$V_i$ (Volt)	10,4	15,4	24,6
$\frac{N_M(i)}{V_i}$ (Amp.)	0,275	0,278	0,31

Der Beitrag des effektivwertabhängigen Gliedes ist dagegen von der Gasart vollkommen unabhängig. Es wächst somit mit steigendem  $V_i$  der Anteil des mittelwertabhängigen Gliedes an der Aufheizung.

Die ermittelten Querwiderstandswerte sind wieder in Fig. 23 eingetragen. Die Abweichungen der He-Kurve von den übrigen wird auf Verschiedenheiten der Oxydschichtdicke in den einzelnen Röhren zurückzuführen sein.

## IX. Zusammenfassung

Zur Untersuchung des bei Stromdurchgang beobachteten Temperaturanstieges an der Kathode eines Hg-Dampf-gefüllten Entladungsgefäßes wurde eine Energiebilanz der Kathode aufgestellt. Sie ergab für die während des Entladungsprozesses

zusätzlich zugeführte Energie einen Ausdruck, der sich aus einem vom Mittelwert und einem vom Effektivwert des Stromes abhängigen Gliede zusammensetzt. Das effektivwertabhängige Glied entspricht dem Leistungsverbrauch am Querverstand, das mittelwertabhängige erfaßt die Prozesse an der Kathodenoberfläche, wie Austrittsarbeit der Elektronen, kinetische Energie der aufprallenden Ionen und Wiedervereinigungswärme. Die Einführung des Formfaktors ermöglicht es, im weiteren alle Betrachtungen einheitlich auf den Effektivwert des Belastungsstromes zu beziehen.

Die zur Bestätigung der Bilanz vorgenommenen Versuche bestanden vor allem in der Aufnahme der Aufheizkennlinien, die den Zusammenhang zwischen Kathodentemperatur und Stromdurchgang wiedergeben. Es bestätigt sich die von der Theorie geforderte Abhängigkeit der Temperaturerhöhung vom Formfaktor. Bezüglich der hierbei auftretenden Abweichungen lassen sich zwei Arten von Aufheizkennlinien unterscheiden, je nachdem, ob sich die Kennlinien bei verschiedenen Formfaktoren überschneiden oder nicht. Letzteres ist normalerweise der Fall, ersteres ist eine Folge hoher Austrittsarbeit und läßt schlechte Kathodenbeschaffenheit vermuten. Die genaue quantitative Auswertung ergibt gute Übereinstimmung der Theorie mit den Meßergebnissen.

Eine Ausdehnung der Versuche auf Rohre mit Edelgasfüllung ergibt auch hier eine Bestätigung der abgeleiteten Bilanz. Dabei zeigt sich, daß unabhängig von der Art des Gases direkt vor der Kathode immer mit dem gleichen Ionenanteil am Stromtransport zu rechnen ist. Ferner ergibt sich, daß der Anteil des effektivwertabhängigen Gliedes an der Aufheizung zwar im allgemeinen überwiegt, daß aber der mittelwertabhängige Anteil mit steigender Ionisierung wächst.

Vorliegende Arbeit wurde im Röhren-Laboratorium des Forschungs-Institutes der AEG. in der Zeit vom 1. 12. 1931 bis 1. 12. 1932 auf Anregung von Dr. A. Glaser ausgeführt.

Berlin-Reinickendorf.

(Eingegangen 9. August 1933)

## **Über optische Abbildung durch mechanische Systeme und die Optik allgemeiner Medien**

**Von Walter Glaser**

Die folgende Arbeit befaßt sich mit der vollständigen Durchführung der von Hamilton vor 100 Jahren entdeckten mechanisch-optischen Analogie. Während man nämlich die Theorie der Abbildung durch rotationssymmetrische optische Instrumente ausführlich entwickelt hat, ist es niemals versucht worden, diese detaillierte Theorie auch für mechanische Systeme zu geben. Der Grund hierfür scheint ein zweifacher zu sein. Erstens lag kein eigentlich physikalisches Motiv hierzu vor, denn diese Abbildung fand nirgends in der Experimentalphysik Verwendung. Zweitens sind die optischen Medien, die vorgegebenen Kraftfeldern in bezug auf den Strahlengang äquivalent sind, von viel allgemeinerer Natur als die stückweise, homogenen Glaskörper der angewandten geometrischen Optik. Inhomogene Medien, also solche mit kontinuierlich variablen Brechungsexponenten wurden nur ganz vereinzelt behandelt. So im Zusammenhang mit der Dioptrik des menschlichen Auges, vor allem von Mathiessen, Herrman und Gullstrand.<sup>1)</sup> Besonders der letztere hat sich ausführlicher damit befaßt. Er hat auch Reihenentwicklungen angegeben, mittels deren man Größe der Brechkraft und die Lage der Hauptpunkte näherungsweise berechnen kann. Die Gullstrandsche Methode ist aber nicht sehr durchsichtig. Auch ist es möglich Formeln anzugeben, welche die erwähnten Größen ohne Vernachlässigungen zu berechnen gestatten und schließlich kann man, wenn man schon zu Reihen seine Zuflucht nehmen muß, Entwicklungen angeben, die durchsichtiger sind und besser konvergieren als diejenigen von Gullstrand. Das allgemeine inhomogene anisotrope Medium scheint, abgesehen von einigen allgemeinen Ansätzen, überhaupt noch nicht behandelt worden zu sein. Und gerade dieses Medium

1) A. Gullstrand, Kungl. Svenska Vetenskapakademiens Handlingar 43. S. 24. No. 2. 1908.

hat in letzter Zeit durch die Entwicklung der Elektronenoptik an Aktualität gewonnen.

Es erscheint paradox, daß man erst jetzt und gerade zu einer Zeit mit dem Gedanken einer optischen Abbildung durch mechanische Systeme Ernst macht, wo durch die Entdeckung der Wellennatur der mechanischen Erscheinungen gerade die hierin liegenden Grenzen dieser optischen Abbildung offenbar werden. Aber die Wellenlänge der Materiewellen ist viel kürzer als die des sichtbaren Lichtes. Es erscheint daher möglich, daß man mit Hilfe der optischen Abbildung durch Elektronenstrahlen das Auflösungsvermögen der optischen Instrumente wird um ein weites übertreffen können. Der erste, der die Gesetze dieser Abbildung für den Spezialfall eines unendlich kurzen elektromagnetischen Feldes entwickelt hat, war H. Busch.<sup>1)</sup> Er hat auch als erster Formeln für die Brennweiten von unendlich dünner elektrischer und magnetischer Linse hergeleitet und auch eine Formel für die Bilddrehung im elektrischen Felde angegeben. Die vollständige Theorie für ein beliebiges axialsymmetrisches Feld mit Berücksichtigung von Relativitäts- und Raumladungseinflüssen einschließlich der Bildfehlertheorie wurde vom Verfasser<sup>2)</sup> gegeben.

Im folgenden soll die Hamiltonsche mechanisch-optische Analogie insofern zu einem gewissen Abschluß gebracht werden, als wir die Abbildung durch die Bahnkurven eines beliebigen mechanischen Systems bis ins Einzelne entwickeln. Wir erhalten so gleichzeitig die Theorie der *Abbildung in allgemeinen inhomogenen anisotropen Medien*, welche Rotationssymmetrie besitzen. Die Theorie des Elektronenmikroskopes ist hierunter als Spezialfall enthalten. Zum Unterschiede von den früheren

1) H. Busch, Arch. f. Elektrotechn. XVIII. S. 583. Heft 6. 1927. Der Spezialfall für das rein-elektrische Feld der Formeln von Busch wurde neuerdings hergeleitet von H. Johannson u. O. Scherzer, Ztschr. f. Phys. 80. S. 185. 1933 und J. Picht, Ann. d. Phys. [5] 15. S. 926 ff. 1933. Von O. Scherzer, Ztschr. f. Phys. 80. S. 193. 1933 und J. Picht, a. a. O., wurde auch die zweite Näherung der Formeln von Busch für den Spezialfall des rein-elektrischen Feldes angegeben.

2) W. Glaser, Ztschr. f. Phys. 80. S. 451. 1933; 81. S. 649, 1933; 83. S. 104. 1933. Kurze Zeit nach Erscheinen der Arbeit, Ztschr. f. Phys. 81. S. 649. 1933, hat auch J. Picht eine Arbeit, Ztschr. f. Instr. 53. S. 274–282. 1933, veröffentlicht, in der gleichfalls die vollständige Formel für die Brechkraft für den Spezialfall des rein-elektrischen, raumladungsfreien Feldes ohne Berücksichtigung von Relativitätskorrekturen hergeleitet wird. — Während in unserer früheren Arbeit, Ztschr. f. Phys. 83. S. 104. 1933, die Bildfehler des Elektronenmikroskops durch Grenzübergang aus denen für zentrierten Linsen gewonnen wurden, sollen sie hier nach einer anderen Methode direkt berechnet werden.



Arbeiten wollen wir die Behandlung des Problems konsequent auf den Eikonalebegriff aufbauen. Um den Brechungsexponenten eines allgemeinen Kraftfeldes zu bestimmen, müssen wir das *Euler-Jakobische Prinzip*, das die geometrische Gestalt der Bahnkurven aus einem Variationsprinzip herzuleiten gestattet, auf den Fall verallgemeinern, daß die Kräfte auch von der Geschwindigkeit der sich bewegenden materiellen Punkte abhängen. Dies wird unsere nächste Aufgabe sein.

### § 1. Der Brechungsexponent eines allgemeinen Kraftfeldes

Ausgangspunkt unserer Betrachtungen bildet das Hamiltonsche Prinzip für mechanische Systeme, deren Lagrangesche Funktion  $L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  die Zeit nicht enthalten möge. Der Bewegungsverlauf eines solchen Systems ist dann durch die Bedingung

$$(1) \quad \int_{t_0}^{t_1} L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) dt \rightarrow \text{Extremum}$$

bestimmt. Die zu (1) gehörigen Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen stimmen nämlich mit den Differentialgleichungen der Bahnkurven überein. Die Funktion  $L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  ist z. B. in dem uns hauptsächlich interessierenden Spezialfall der relativistischen Bewegung von Elektronen im elektromagnetischen Feld mit den Potentialen  $\Phi(x, y, z)$  und  $\mathcal{A}(x, y, z)$  gegeben durch

$$(2) \quad L = \eta c^2 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) - \Phi + \frac{1}{c} (\mathcal{A}v), \quad \eta = \frac{m}{e}.$$

Beschränkt man sich auf ein reines Potentialfeld  $U(x, y, z)$  und auf klassische Mechanik, so wird hieraus, wenn man  $e\Phi = U$  setzt

$$(3) \quad L = \frac{m}{2} v^2 - U.$$

$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  bedeutet also in diesem Falle die Differenz zwischen kinetischer und potentieller Energie, lauter bekannte Dinge, an die wir nur kurz erinnern wollten. Gehen wir von der Zeit  $t$  durch  $t = t(u)$  zu einem allgemeinen Parameter  $u$  über, so wird aus (1)

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{u_0}^{u_1} L \left( x, y, z, \frac{x'}{t'}, \frac{y'}{t'}, \frac{z'}{t'} \right) t' du \\ &= \int_{u_0}^{u_1} G(x, y, z, x', y', z', t') du, \quad \frac{dt}{du} = t', \end{aligned} \right.$$

wenn wir für das folgende zur Abkürzung

$$(5) \quad L\left(x, y, z, \frac{x'}{t'}, \frac{y'}{t'}, \frac{z'}{t'}\right) t' = G(x, y, z, x', y', z', t')$$

setzten. Die Funktion  $G(x, y, z, x', y', z', t')$  ist in den vier Variablen  $x', y', z', t'$  homogen von erster Ordnung. Sie genügt daher der Gleichung

$$(6) \quad G(\alpha x', \alpha y', \alpha z', \alpha t') = \alpha G(x', y', z', t')$$

und das Variationsproblem (4) ist unabhängig vom Parameter ( $u$ ). Die zu  $t$  gehörige Euler-Lagrangesche Differentialgleichung von (4)

$$(7) \quad \frac{d}{du} \frac{\partial G}{\partial t'} - \frac{\partial G}{\partial t} = 0,$$

ergibt, da  $G$  von  $t$  unabhängig ist, das Energieintegral

$$(8) \quad \frac{\partial G}{\partial t'} = G_t(x, y, z, x', y', z', t') = -E,$$

dessen Konstante wir mit  $-E$  bezeichnet haben. Ausgeschrieben erhalten wir hierfür nach (5) den Ausdruck

$$(9) \quad \left( \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{y} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \dot{z} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - L = E.$$

Wie durch Differentiation der Gl. (6) nach  $t'$  hervorgeht, ist die Funktion  $G_t(x', y', z', t')$  in den Variablen  $x', y', z', t'$  homogen von nullter Ordnung:

$$(10) \quad G_t(x, y, z, \alpha x', \alpha y', \alpha z', \alpha t') = G_t(x, y, z, x', y', z') = -E$$

löst man diese Gleichung nach  $t'$  auf und setzt  $t' = f(x, y, z, x', y', z')$ , so folgt aus (10), daß die Funktion  $f(x', y', z')$  homogen von erster Ordnung ist

$$(11) \quad \alpha t' = \alpha f(x, y, z, x', y', z') = f(x, y, z, \alpha x', \alpha y', \alpha z').$$

Indem wir die Funktion (11) für  $t'$  in (5) einsetzen, erhalten wir eine in den Variablen  $x', y', z'$  homogene Funktion von erster Ordnung

$$(12) \quad G(x, y, z, x', y', z', f(x', y', z')) = F(x, y, z, x', y', z')$$

und das Variationsproblem

$$(13) \quad \int_{u_0}^{u_1} F(x, y, z, x', y', z') du \longrightarrow \text{Extremum}$$

ist daher unabhängig vom Parameter. Die Differentialgleichungen der Bahnkurven erhalten wir, wenn wir in die zu (4) gehörigen Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen für  $t'$ , die aus dem Energieintegral (10) folgende Funktion (11) einsetzen. Bezeichnen wir Funktionen  $G(x', y', z', t')$ ,  $G_x(x', y', z', t')$ ,  $G_x(x', y', z', t')$

usw. von  $x, y, z, x', y', z', t'$ , in die wir uns für die Variable  $t'$  den Wert aus (11) eingesetzt denken, durch Überstreichen also  $G(x, y, z, t')_{t'=t} = G$ ,  $G_x(x, y, z, t')_{t'=t} = G_x \dots$ , so lauten die Differentialgleichungen der Bahnkurven

$$(14) \quad \frac{d\bar{G}_x}{du} - \bar{G}_x = 0, \quad \frac{d\bar{G}_y}{du} - \bar{G}_y = 0, \quad \frac{d\bar{G}_z}{du} - \bar{G}_z = 0.$$

Die zu (13) gehörigen Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen lauten:

$$(15) \quad \frac{dF_x}{du} - F_x = 0, \quad \frac{dF_y}{du} - F_y = 0, \quad \frac{dF_z}{du} - F_z = 0.$$

Oder nach (12)

$$(16) \quad \frac{dF_x}{du} - F_x = \frac{d}{du}(\bar{G}_x + G_x f_x) - (G_x + G_x f_x) \text{ usw.}$$

Da  $f(x, y, z)$  durch Auflösung von  $G_x(x, y, z, x', y', z', t') = -E$  nach  $t'$  entsteht, hat  $G_x$  den Wert  $-E$ . Indem wir diese Größe in (16) einsetzen, können wir daher die Gl. (14) der Bahnkurven auch in der Gestalt

$$(17) \quad \frac{d\bar{G}_x}{du} - \bar{G}_x = \frac{d}{du}(F + Ef)_x - (F + Ef)_x = 0 \text{ usw.}$$

schreiben.<sup>1)</sup> Sie sind somit die Extremalen des Variationsproblems

$$(18) \quad \int_{u_0}^{u_1} (F + Ef) du \rightarrow \text{Extremum.}$$

Für das Folgende brauchen wir den Einheitsvektor  $\hat{s}$  in der Strahlrichtung, seine Komponenten  $\alpha, \beta, \gamma$  sind gegeben durch die Gleichungen

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{dx}{ds} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, & \beta &= \frac{dy}{ds} = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \\ \gamma &= \frac{dz}{ds} = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}. \end{aligned} \right.$$

Wenn wir in (18) den Parameter  $du$  durch das Bogenelement  $ds$  ersetzen, erhalten wir für den Integranden

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} & [F(x', y', z') + Ef(x', y', z')] \frac{ds}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \\ & = \left[ F \left( \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \right) \right. \\ & \quad \left. + Ef \left( \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \right) \right] ds. \end{aligned} \right.$$

<sup>1)</sup> Dies ergibt sich auch als Spezialfall des Satzes von Ruth. Vgl. Frank-Mises, II. Bd. S. 60 (50).

Die so entstehende Funktion

$$(21) \quad \mu(\mathbf{r}, \hat{s}) = F(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) + E f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$$

des Ortes  $\mathbf{r}$  und der Strahlrichtung  $\hat{s}$  nennen wir den *Brechungs-exponenten des mechanischen Systems*.

In unserem Falle, wo  $G$  die besondere Gestalt (5) hat, können wir noch etwas weiter gehen. Wir wählen als Parameter die Bogenlänge  $s$  und schreiben statt  $t'$ ,  $1/v$ , die reziproke Geschwindigkeit. Nach (21) erhalten wir dann für  $\mu$

$$(22) \quad \mu = \frac{1}{v} (L + E).$$

Wenn wir nun für  $L + E$  aus (9) einsetzen, überall statt  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  bzw.  $\alpha v, \beta v, \gamma v$  schreiben und schließlich noch durch  $v$  kürzen, erhalten wir für  $\mu$  den endgültigen Ausdruck

$$(23) \quad \mu = \alpha L_x(\alpha v, \beta v, \gamma v) + \beta L_y(\alpha v, \beta v, \gamma v) + \gamma L_z(\alpha v, \beta v, \gamma v),$$

wobei die Funktion  $v = v(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$  von  $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$  aus der Energiegleichung

$$(24) \quad v(\alpha L_x + \beta L_y + \gamma L_z) - L(\alpha v, \beta v, \gamma v) = E$$

zu entnehmen ist.

Durch Einführung des Operators  $\nabla_a$  mit den Komponenten  $\partial/\partial \alpha_x, \partial/\partial \alpha_y, \partial/\partial \alpha_z$  können wir die Gl. (23) und (24) auf folgende Art in vektorieller Gestalt schreiben

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mu = \hat{s} \nabla_{\hat{s}} L, & v \hat{s} \nabla_{\hat{s}} L - L = E \\ \text{und} & \dot{\mathbf{r}} = v \hat{s}. \end{array} \right.$$

Um den Brechungsexponenten zu erhalten hat man also in den ersten beiden Gl. (25) überall  $\dot{\mathbf{r}}$  durch  $v \hat{s}$  zu ersetzen und schließlich aus den so erhaltenen beiden Gleichungen  $v$  zu eliminieren.

Ist z. B.  $L = \frac{m}{2} v^2 - U$ , so findet man nach (9)

$$(26) \quad \frac{m}{2} v^2 + U = E.$$

(23) ergibt

$$(27) \quad \mu = m v;$$

durch Elimination von  $v$  aus (26) und (27) erhalten wir für  $\mu$  die bekannte Formel

$$(28) \quad \mu = \sqrt{2m(E - U)}.$$

Nimmt man dagegen für  $L$  den Ausdruck (2), so erhält man nach (23) zunächst

$$(29) \quad \mu = \frac{\eta v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{1}{c} (\mathcal{U} \hat{s}).$$

Der Energiesatz (9) ergibt

$$(30) \quad \frac{\eta c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \Phi = V_0 + \eta c^2 \quad \text{mit} \quad E = V_0 \quad (\text{Röhren-} \\ \text{spannung})$$

und indem man den hieraus für  $\frac{\eta v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  folgenden Wert

$$\sqrt{(V_0 - \Phi)(V_0 + 2\eta c^2 - \Phi)}$$

in (29) einsetzt, erhält der Brechungsexponent des elektromagnetischen Feldes die Gestalt:

$$(31) \quad \mu(\mathbf{r}, \hat{s}) = \sqrt{(V_0 - \Phi)(V_0 + 2\eta c^2 - \Phi)} + \frac{1}{c} (\mathcal{U} \hat{s}).$$

## § 2. Optische Weglänge und Punkteikonal

In der Optik ist bekanntlich  $\mu$  durch

$$(32) \quad \mu = \frac{c}{v}$$

definiert, wobei  $v(\mathbf{r}, \hat{s})$  die Lichtgeschwindigkeit als Funktion des Ortes und der Richtung in dem betreffenden Medium und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bedeutet. Das Fermatsche Prinzip besagt nun, daß das Integral

$$(33) \quad E = \int_{P_0}^{P_1} \mu(\mathbf{r}, \hat{s}) ds,$$

das zwischen zwei beliebigen Punkten  $P_0$  und  $P_1$  des Mediums längs verschiedener Wege erstreckt wird, dann seinen kleinsten Wert erhält, wenn die Integration längs der tatsächlichen Lichtbewegung erfolgt. Man nennt diesen Minimalwert des obigen Integrales den *Lichtweg* bzw. die *optische Weglänge* zwischen  $P_0$  und  $P_1$ . Wir sehen, daß unser umgeformtes Hamiltonsches Prinzip mit der Aussage des Fermatschen Prinzipes übereinstimmt.

Schreiben wir (33) in der Form

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} E &= \int_{P_0}^{P_1} \mu(\mathbf{r}, \hat{s}) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} du = \int_{P_0}^{P_1} F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') du, \\ F &= \mu \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \end{aligned} \right.$$

und bilden wir in der üblichen Weise die erste Variation, indem wir partiell integrieren, so erhalten wir

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta E &= \int_{P_0}^{P_1} (\nabla_{\mathbf{r}} F \cdot \delta \mathbf{r} + \nabla_{\mathbf{r}'} F \cdot \delta \mathbf{r}') dn \\ &= \int_{P_0}^{P_1} \left( \nabla_{\mathbf{r}} F - \frac{d}{du} \nabla_{\mathbf{r}'} F \right) \cdot \delta \mathbf{r} + \nabla_{\mathbf{r}'} F \cdot \delta \mathbf{r}' \Big|_{P_0}^{P_1}. \end{aligned} \right.$$

Da für  $\delta \mathbf{r}_1 = \delta \mathbf{r}_2 = 0$ , wegen der Minimaleigenschaft,  $\delta E$  verschwinden muß, lauten die Gleichungen der Lichtbewegung

$$\nabla_{\mathbf{r}} F - \frac{d}{du} \nabla_{\mathbf{r}'} F = 0$$

oder in Komponenten

$$(36) \quad \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{du} \frac{\partial F}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{du} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \dots$$

Bezeichnen wir noch  $\nabla_{\mathbf{r}'} F$  mit

$$(37) \quad \mathbf{n} = \nabla_{\mathbf{r}'} F,$$

so erhalten wir aus (35) für die Änderungen des Lichtweges, wenn die beiden Endpunkte  $P_0$  und  $P_1$  die Verrückungen  $\delta \mathbf{r}_0$  bzw.  $\delta \mathbf{r}_1$  erleiden die fundamentale Formel von Hamilton<sup>1)</sup>

$$(38) \quad \delta E = n_1 \delta \mathbf{r}_1 - n_0 \delta \mathbf{r}_0.$$

Der Vektor  $\mathbf{n}$ , wir wollen ihn den *Normalvektor* nennen ist dabei nach (34) und (37) durch<sup>2)</sup>

$$(39) \quad \mathbf{n} = \mu \mathbf{s} + [\nabla_{\mathbf{s}} \mu - \mathbf{s} (\mathbf{s} \cdot \nabla_{\mathbf{s}} \mu)]$$

gegeben. Den Punkt  $P_0$  wollen wir als *Objektpunkt* und den mit ihm durch einen Lichtstrahl verbundenen Punkt  $P_1$  als *Bildpunkt* bezeichnen. Wir wollen annehmen, daß Bild- und Objektpunkt in kräftefreien Gebieten bzw. in Gebieten konstanten Brechungsexponentens liegen. Wir wollen diese beiden Raumgebiete als *Objekt-* und *Bildraum* unterscheiden. Die Bahnkurven wie auch die Lichtstrahlen sind also hier gerade Linien. Der Brechungsexponent habe im Objektraum den konstanten Wert  $\mu_0$ , im Bildraum den Wert  $\mu_1$ . Wir setzen voraus, daß sich an die Gebiete mit konstantem Brechungsexponenten dasjenige mit kontinuierlich variablen, anisotropen Brechungsexponenten stetig anschließt. Es würde keinerlei

1) W. R. Hamilton, Theorie der Strahlensysteme, S. 159. (3). Ich danke Herrn Prof. P. Funk, Prag, für die Liebenswürdigkeit, mir Hamiltons Schriften zur Verfügung gestellt zu haben.

2) Vgl. hierzu Ph. Frank, Ztschr. f. Phys. 80. S. 4. 1933. (16), (16a).

Komplikation der folgenden Rechnungen bedeuten, wenn wir annehmen wollten, daß das Gebiet des variablen Brechungsexponenten durch vorgegebene Begrenzungsflächen von denjenigen mit konstanten Brechungsexponenten getrennt sei. Wir wollen indessen statt diesem mehr auf eine optische Linse zugeschnittenen Fall, den obigen behandeln, welcher der Abbildung durch vorgegebene Kraftfelder entspricht, die ja im allgemeinen allmählich nach beiden Seiten von einem bestimmten Hauptwerte an verschwinden werden. Das Musterbeispiel hierfür bildet wieder das elektromagnetische Feld, das mit wachsender Entfernung von den felderzeugenden Anordnungen, den Spulen und Kondensatoren in den Wert Null übergeht. Die materiellen Punkte bzw. das Licht, die im Objektraum längs einer Geraden den Punkt  $P_0$  verlassen, treten also in ein Kraftfeld bzw. in ein inhomogenes anisotropes Medium ein, wo sie irgendwelche krummlinigen Kurven beschreiben, um schließlich wieder nach Verlassen dieses Kraftfeldes im Bildraum den Bildpunkt  $P_1$  als Gerade zu durchsetzen. Da sowohl im Objekt- wie im Bildraum voraussetzungsgemäß die Beziehung

$$(40) \quad \nabla_s \mu = 0$$

gilt, haben in den Punkten  $P_0$  und  $P_1$  die Vektoren  $n_0$  und  $n_1$  nach (39) die Werte

$$(41) \quad n_0 = \mu_0 \hat{s}_0, \quad n_1 = \mu_1 \hat{s}_1.$$

Die Gl. (38) lautet daher

$$(42) \quad \delta E = \mu_1 \hat{s}_1 \delta r_1 - \mu_0 \hat{s}_0 \delta r_0$$

oder in Komponenten

$$(43) \quad \begin{cases} \mu_0 \alpha_0 = -\frac{\partial E}{\partial x_0}, & \mu_0 \beta_0 = -\frac{\partial E}{\partial y_0}, & \mu_0 \gamma_0 = -\frac{\partial E}{\partial z_0}; \\ \mu_1 \alpha_1 = -\frac{\partial E}{\partial x_1}, & \mu_1 \beta_1 = -\frac{\partial E}{\partial y_1}, & \mu_1 \gamma_1 = -\frac{\partial E}{\partial z_1}. \end{cases}$$

### § 3. Das Winkeleikonal

In der bekannten Weise gehen wir von der Funktion  $E$  zum Winkeleikonal  $W$  über. Unter Verwendung zweier konstanter Vektoren  $a_0 \equiv a_0, 0, 0$  und  $a_1 \equiv a_1, 0, 0$  setzen wir zunächst:

$$(44) \quad V = E - \mu_1 (\tau_1 - a_1) \hat{s}_1 + \mu_0 (\tau_0 - a_0) \hat{s}_0.$$

Hierin erscheint  $V$  als Funktion sowohl des Ortes  $\tau$  wie auch der Strahlrichtung  $\hat{s}$ . Die Variation von  $V$  nach allen diesen Variablen  $\tau, \hat{s}$  ergibt aber mit Rücksicht auf (42)

$$(45) \quad \delta V = -\mu_1 (\tau_1 - a_1) \delta \hat{s}_1 + \mu_0 (\tau_0 - a_0) \delta \hat{s}_0,$$



woraus man erkennt, daß  $V$  nur von der Anfangsrichtung  $\beta_0$  und der Endrichtung  $\beta_1$  des Strahles abhängt. In Komponenten lautet die Gl. (45)

$$(46) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = -\mu_1(x_1 - a_1), & \frac{\partial V}{\partial \beta_1} = -\mu_1 y_1, & \frac{\partial V}{\partial \gamma_1} = -\mu_1 z_1; \\ \frac{\partial V}{\partial \alpha_0} = \mu_0(x_0 - a_0), & \frac{\partial V}{\partial \beta_0} = \mu_0 y_0, & \frac{\partial V}{\partial \gamma_0} = \mu_0 z_0. \end{cases}$$

Seiner geometrischen Bedeutung nach ist  $V$  die optische Weglänge zwischen den Fußpunkten der Normalen, welche man von den auf der  $X$ -Achse liegenden Punkten  $x = a_0$  und  $x = a_1$  bzw. auf den Anfangsstrahl und Endstrahl fällt.

Die gesuchte Funktion  $W$  ergibt sich schließlich aus  $V$ , wenn man hieraus mit Hilfe der Beziehung

$$(47) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

die Größe  $\alpha$  eliminiert. Man findet auf Grund von (46)

$$(48) \quad \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial \beta_1} = -\mu_1 \left[ y_1 - (x_1 - a_1) \frac{\beta_1}{\alpha_1} \right], & \frac{\partial W}{\partial \gamma_1} = -\mu_1 \left[ z_1 - (x_1 - a_1) \frac{\gamma_1}{\alpha_1} \right]; \\ \frac{\partial W}{\partial \beta_0} = \mu_0 \left[ y_0 - (x_0 - a_0) \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right], & \frac{\partial W}{\partial \gamma_0} = \mu_0 \left[ z_0 - (x_0 - a_0) \frac{\gamma_0}{\alpha_0} \right]. \end{cases}$$

Die rechten Seiten der obigen Gleichungen bedeuten die Koordinaten des Strahlschnittpunktes mit den beiden Ebenen  $x = a_0$  und  $x = a_1$ . Bezeichnen wir sie mit  $Y_0, Z_0, Y_1, Z_1$ , so kann man die Gl. (48) in der endgültigen Gestalt schreiben

$$(49) \quad \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial \beta_1} = -\mu_1 Y_1, & \frac{\partial W}{\partial \gamma_1} = -\mu_1 Z_1; \\ \frac{\partial W}{\partial \beta_0} = \mu_0 Y_0, & \frac{\partial W}{\partial \gamma_0} = \mu_0 Z_0. \end{cases}$$

Die Differentialquotienten der Funktion  $W(\beta_0, \gamma_0, \beta_1, \gamma_1)$  nach ihren vier Variablen  $\beta_1, \gamma_1, \beta_0, \gamma_0$  liefern direkt die Schnittkoordinaten des Strahles mit den beiden Ebenen  $x = a_0$  und  $x = a_1$ . Diese beiden Ebenen wollen wir als *Objekt-* und *Bildebene* wählen.  $W$  als optische Weglänge zwischen den obigen beiden Normalen ist ein Minimum für den wirklichen Strahlweg verglichen mit allen anderen Wegen mit derselben Anfangs- und Endrichtung.<sup>1)</sup>

#### § 4. Dioptrik rotationssymmetrischer Kraftfelder

Wir betrachten nun Kraftfelder bzw. allgemeine optische Medien, die um die  $X$ -Achse rotationssymmetrisch sind. Gehen wir von den rechtwinkligen Koordinaten  $x, y, z$  zu Zylinder-

<sup>1)</sup> Dies folgt aus (44) auf Grund der analogen Minimaleigenschaft von  $E$ .

koordinaten  $x, r, \varphi$  über, so zeigt sich dieser Symmetriecharakter darin, daß im transformierten Brechungsexponenten

$$\mu(x, r, \dot{x}, \dot{r}, \dot{\varphi})^1$$

die Variable  $\varphi$  nicht vorkommen darf. Die Koordinate  $\varphi$  ist eine zyklische Koordinate. Da die Transformationsgleichungen von  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  zu  $\dot{x}, \dot{r}, \dot{\varphi}$  linear und homogen sind, ist in

$$(50) \quad F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = J(x, r, \dot{x}, \dot{r}, \dot{\varphi})$$

die Funktion  $J(x, r, \dot{x}, \dot{r}, \dot{\varphi})$  gleichfalls in den Variablen  $\dot{x}, \dot{r}, \dot{\varphi}$  homogen von erster Ordnung. Die Drehungsinvarianz unseres Variationsproblems gestattet nun ebenso wie früher beim Hamiltonschen Prinzip die Zahl der Variablen um eine zu reduzieren. Die zu  $\varphi$  gehörige Euler-Langrangesche Gleichung

$$(51) \quad \frac{d}{du} \frac{\partial J}{\partial \varphi} = 0$$

ergibt nämlich das *Impulsintegral*

$$(52) \quad J_{\dot{\varphi}}(x, r, \dot{x}, \dot{r}, \dot{\varphi}) = c \quad (\text{Konstanz}).$$

Nach derselben Überlegung wie in § 1 ist die Funktion

$$J_{\dot{\varphi}}(x, r, \dot{x}, \dot{r}, \dot{\varphi})$$

homogen von nullter Ordnung in den Variablen  $\dot{x}, \dot{r}, \dot{\varphi}$  und die hieraus durch Auflösung nach  $\dot{\varphi}$  hervorgehende Gleichung

$$(53) \quad \dot{\varphi} = f(x, r, \dot{x}, \dot{r}), \quad d\varphi = f(x, r, dx, dr) = g(x, r, r') dx$$

ist in den Größen  $\dot{x}$  und  $\dot{r}$  homogen von erster Ordnung. Wir wollen fordern, daß die abbildenden Strahlen in Objekt und Bildraum *Meridianstrahlen* seien. Dies ergibt für die Integrationskonstante  $C$  in (52) den Wert Null. Denn schreiben wir ausführlich für  $J(r, \dot{r}, \dot{x}, \dot{\varphi}) = \mu \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2}$  und setzen dies in (52) ein, so ergibt sich, da sowohl im Bild- wie im Objektraum ( $\mu_{\dot{\varphi}} = 0$ )  $\mu_{\dot{\varphi}}$  verschwindet, der Ausdruck

$$(54) \quad \mu_0 \frac{r^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2}} = C.$$

Soll nun aber hier der Strahl beständig in einer durch die Achse gehenden Ebene liegen, so muß  $r\dot{\varphi}$  im Punkte  $x = a$  und  $x = b$  verschwinden. Das aber hat  $C = 0$  zur Folge.

1) Wir wollen für das Folgende Ableitungen nach dem Parameter  $u$  mit einem über dem Buchstaben geschriebenen Punkt bezeichnen, während wir uns den Strich für Ableitungen nach der Variablen  $x$  reservieren.

Ist das optische Medium speziell ein isotropes, d. h. hängt  $\mu$  überhaupt nicht von  $\phi$  ab, so heißt dies, daß der Strahl beständig in einer Meridianebene bleibt, und daß die durch (53) gegebene Strahlendrehung verschwindet. In unserem Falle ist zwar der Impuls um die X-Achse überall Null, aber infolge der Anisotropie bedeutet das nur, daß bloß im Objekt- und Bildraum die Strahlendrehung verschwindet, nicht aber im Zwischengebiet des variablen Brechungsexponenten.<sup>1)</sup> Indem wir nun (53) in (50) einführen, also nur Bahnkurven des Gesamtdrehimpulses Null betrachten, erhalten wir

$$(55) \quad J(x, r, \dot{x}, \dot{r}, \phi) du = J(x, r, dx, dr, f(x, r, dx, dr)) = I(x, r, r') dx$$

und die optische Weglänge berechnet sich aus dem Integral

$$(56) \quad E = \int_{P_0}^{P_1} I(x, r, r') dx.$$

Wegen der Rotationssymmetrie erfüllt die Funktion  $I(x, r, r')$  die Bedingungen

$$(57) \quad I(x, r, r') = I(x, -r, r'); \quad I(x, r, r') = I(x, r, -r').$$

Die bei Kristallen stets vorhandene Eigenschaft der symmetrischen Anisotropie  $\mu(\mathbf{r}, \hat{s}) = \mu(\mathbf{r}, -\hat{s})$  wollen wir dagegen für unser optisches Medium nicht voraussetzen. Sie wird auch im allgemeinen Fall gar nicht vorhanden sein, wie schon das Beispiel der Abbildung durch elektromagnetische Felder zeigt, wo infolge der Wirkung des Magnetfeldes einer Umkehrung der Strahlrichtung eine Änderung des Drehsinnes der Schraubebewegung für die Elektronen entspricht.

Entwickeln wir (55) in eine MacLaurinsche Reihe, so wird diese wegen (57) die Gestalt haben

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} I(x, r, r') &= I_{00}(x) + \frac{1}{2} [I_{20}(x) r^2 + I_{02}(x) r'^2] + \frac{1}{4} [I_{40}(x) r^4 \\ &\quad + 2 I_{22}(x) r^2 r'^2 + I_{04}(x) r'^4] + \dots \end{aligned} \right.$$

Hierbei haben die angeschriebenen Funktionen folgende Bedeutung

$$(59) \quad \left\{ \begin{aligned} I_{00}(x) &= I(x, 0, 0), \quad I_{20} = \frac{\partial^2 I}{\partial r^2}, \quad I_{02} = \frac{\partial^2 I}{\partial r'^2}, \quad I_{40} = \frac{1}{6} \frac{\partial^4 I}{\partial r^4}, \\ I_{22} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^4 I}{\partial r^2 \partial r'^2}, \quad I_{04} = \frac{1}{6} \frac{\partial^4 I}{\partial r'^4}, \end{aligned} \right.$$

worin die Ableitungen für den „Hauptstrahl“  $r = r' = 0$  zu nehmen sind. Im Bild- und Objektraum stimmen die Werte

1) Vgl. hierzu die Figur aus *Ztschr. f. Phys.* 81. S. 661. 1933.

der Funktion  $I_{02}$  mit  $\mu_1$  bzw.  $\mu_0$  überein. Denn  $J(\dot{x} \dot{\varphi})$  hat hier die Gestalt  $\mu_0 \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2}$ ; setzen wir hierin den aus (54) folgenden Wert  $r\dot{\varphi} = 0$  für  $r\dot{\varphi}$  ein, ergibt sich  $I(x, r\dot{\varphi})$  in der Gestalt  $I(x, r, r') = \mu_0 \sqrt{1 + r'^2}$  oder entwickelt

$$(60) \quad I(x, r, r') = \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0 r'^2 - \frac{1}{8} \mu_0 r'^4 + \dots,$$

man ersieht hieraus, daß die Funktionen aus (58) im Objekt-raum folgende Werte annehmen

$$(61) \quad I_{00}(x) = \mu_0, \quad I_{20} = 0, \quad I_{02} = \mu_0, \quad I_{40} = I_{22} = 0, \quad I_{04} = -\frac{1}{2} \mu_0.$$

Analoges gilt natürlich für den Bildraum. Den Ausdruck (53) entwickeln wir gleichfalls in eine Reihe und erhalten

$$(62) \quad g(x, r, r') = g_{00}(x) + \frac{1}{2} [g_{20} r^2 + g_{02} r'^2] + \dots$$

### § 5. Die Gauss'sche Dioptrik

Unter der *Gauss'schen Dioptrik* versteht man bekanntlich die Abbildung durch achsennahe, flache Lichtstrahlen. Diese sind dadurch charakterisiert, daß für ihre Berechnung die zweiten und höheren Potenzen des Achsenabstandes  $r$  und der Bahnneigung  $r'$  gegenüber den ersten Potenzen vernachlässigt werden. Den Feldbereich denken wir uns von zwei achsen-senkrechten Ebenen  $E_0$  und  $E_1$ , die wir als die beiden „Scheitelebenen“ unserer „Linse“ bezeichnen wollen, eingeschlossen. Die beiden Schnittpunkte dieser Ebenen mit der X-Achse seien  $x = a$  und  $x = b$ . Diese beiden „Scheitelpunkte“ der Linse sollen noch Punkte des Objekt- bzw. Bildraumes sein. Ihre Lage ist in weitem Maße willkürlich. Objekt- und Bildraum wollen wir auf Koordinatensysteme beziehen, welche die beiden Scheitelpunkte  $x = a$  bzw.  $x = b$  zu Anfangspunkten haben. Die Richtung der positiven X-Achse sei im Objekt-raum diejenige von rechts nach links, im Bildraum verlaufe sie entgegengesetzt. Unsere Wahl der Integrationskonstanten  $C = 0$  in (52) bringt es mit sich, daß die Funktion  $r = r(x)$ , welche im Verein mit  $\varphi = \varphi(x)$  die Gleichung der Bahnkurve darstellt, von den Anfangswerten von  $\varphi$  vollkommen unabhängig ist. Diese Werte gehen nämlich gar nicht in die Differentialgleichung für  $r$  ein und sind daher auch nicht in den Integralen derselben enthalten. Wir können so rechnen, als ob die Strahlendrehung (53) gar nicht vorhanden wäre und brauchen diese erst nachträglich zu berücksichtigen. Anders ausgedrückt können wir auch sagen, daß wir ein Koordinatensystem einführen, dessen X-Achse beständig in der Symmetrieachse des optischen Systemes liegt und dessen Y- und Z-Achse

mit der durch (53) gegebenen Winkelgeschwindigkeit um die  $X$ -Achse rotieren. Im Scheitel  $x = a$  mögen die Achsen des rotierenden Systemes mit den Achsen des Koordinatensystemes, auf das wir die Punkte des Objektraumes beziehen, zusammenfallen. Ist  $\varphi_0$  der Winkel zwischen  $r$  und der  $Y$ -Achse in diesem Systeme im Punkte  $x = a$ , so gilt im rotierenden System beständig

$$(63) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{also} \quad y = r \cos \varphi_0, \quad z = r \sin \varphi_0 \\ r^2 = y^2 + z^2 \quad r'^2 = y'^2 + z'^2, \end{array} \right.$$

wenn wir unter  $y$  und  $z$  die Koordinaten in diesem Bezugssystem verstehen. In diesen Variablen erhalten (58) und (62) bzw. die Gestalten

$$(64) \quad \left\{ \begin{array}{l} I(x, r, r') = I_{00} + \frac{1}{2} [I_{20}(y^2 + z^2) + I_{02}(y'^2 + z'^2)] \\ \quad + \frac{1}{4} [I_{40}(y^2 + z^2) + 2 I_{22}(y^2 + z^2)(y'^2 + z'^2) \\ \quad + I_{04}(y'^2 + z'^2)^2] + \dots \end{array} \right.$$

$$(65) \quad g(z, r, r') = g_{00} + \frac{1}{2} [g_{20}(y^2 + z^2) + g_{02}(y'^2 + z'^2)] + \dots$$

Für den Gauss'schen Strahlengang folgen hieraus die beiden Euler-Lagrangischen Differentialgleichungen

$$\frac{dI_{y'}}{dx} - I_y = 0, \quad \frac{dI_{z'}}{dx} - I_z = 0 \quad \text{mit} \quad y^2 \sim z^2 \sim 0, \quad y'^2 \sim z'^2 \sim 0$$

$$(66) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left( I_{02} \frac{dy}{dx} \right) = I_{20} y, \quad \frac{d}{dx} \left( I_{02} \frac{dz}{dx} \right) = I_{20} z; \\ \frac{d}{dx} \left( I_{02} \frac{dr}{dx} \right) = I_{20} r. \end{array} \right.$$

Die Komponenten von  $\mathfrak{s}$  sind gegeben durch

$$(67) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}, \quad \beta = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}, \\ \gamma = \frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} \end{array} \right.$$

oder bis auf Glieder dritter Ordnung

$$(68) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 - \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \right] + \dots \\ \beta = \frac{dy}{dx} \dots, \quad \gamma = \frac{dz}{dx} \dots \end{array} \right.$$

Seien  $r_1(x)$  und  $r_2(x)$  die beiden Lösungen von (66), welche folgende Anfangsbedingungen im Punkte  $x = a$  erfüllen

$$(69) \quad \begin{cases} r_1(a) = 1, & r_1'(a) = 0; \\ r_2(a) = 0, & r_2'(a) = 1. \end{cases}$$

Das allgemeine Integral der ersten der Gleichungen (66) wird somit die Gestalt haben

$$(70) \quad y = c_1 r_1 + c_2 r_2.$$

Diejenige Lösung, die im Punkte  $x = a$  die Richtung  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = \alpha_0$

und in  $x = b$  die Richtung  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=b} = \alpha_1$  besitzt, ergibt sich hieraus zu

$$(71) \quad y = \varrho_0 \beta_0 + \varrho_1 \beta_1,$$

wobei  $\varrho_0$  und  $\varrho_1$  folgende Funktionen bedeuten:

$$(72) \quad \begin{cases} \varrho_0 = r_2(x) - r_1(x) \frac{r_2'(b)}{r_1'(b)}; \\ \varrho_1 = r_1(x) \frac{1}{r_1'(b)}. \end{cases}$$

Analog erhält man für  $z$

$$(73) \quad z = \varrho_0 \gamma_0 + \varrho_1 \gamma_1.$$

Die beiden Gleichungen (71) und (73) stellen den Gauss'schen Strahlengang innerhalb des Feldbereiches dar und die beiden Funktionen  $\varrho_0(x)$  und  $\varrho_1(x)$  genügen als Linearkombinationen (72) zweier Lösungen von (66) gleichfalls den Differentialgleichungen (66).

Ist  $s_0 = a - a_0$  die Entfernung des Objektpunktes von der ersten Scheitelebene,  $s_1 = b - a_1$  die Entfernung des Bildpunktes vom zweiten Scheitel, so ergibt sich für die Funktion  $V(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  der Ausdruck<sup>1)</sup>

$$(74) \quad V = \mu_0(\alpha_0 s_0 + \beta_0 y_a + \gamma_0 z_a) + \int_a^b I dx - \mu_1(\alpha_1 s_1 + \beta_1 y_b + \gamma_1 z_b).$$

Setzt man hierin nach (47) für  $\alpha$  die Entwicklung

$$(75) \quad \alpha = 1 - \frac{1}{2}(\beta^2 + \gamma^2) + \frac{1}{8}(\beta^2 + \gamma^2)^2 - \dots$$

ein, so erhält das Winkeleikonal bis auf Glieder 6. Ordnung die Gestalt

1) Als optische Weglänge zwischen den Fußpunkten der Normalen von  $x = a_0$  und  $x = a_1$  auf Anfangs- und Endstrahl.

$$(76) \left\{ \begin{aligned} W = & \mu_0 s_0 \left[ 1 - \frac{1}{2} (\beta_0^2 + \gamma_0^2) + \frac{1}{8} (\beta_0^4 + \gamma_0^4) - \dots \right] \\ & + \mu_0 (\beta_0 y_a + \gamma_0 z_a) + \int_a^b I_{00} dx + \frac{1}{2} \int [I_{20} r^2 + I_{02} r'^2] dx \\ & + \frac{1}{2} \int_a^b [I_{40} r^4 + 2 I_{22} r^2 r'^2 + I_{04} r'^4] dx \\ & - \mu_1 s_1 \left[ 1 - \frac{1}{2} (\beta_1^2 + \gamma_1^2) + \frac{1}{8} (\beta_1^4 + \gamma_1^4) - \dots \right] \\ & - \mu_1 (\beta_1 y_b + \gamma_1 z_b) + \dots \end{aligned} \right.$$

Hierin hätte man für  $r(x)$  und  $r'(x)$  die Gleichung des Lichtstrahles als Funktion von  $\beta_0, \gamma_0, \beta_1, \gamma_1$  einzusetzen. Indessen ist es gar nicht nötig den genauen Strahlengang zu kennen, sondern es genügt für unsere gewünschte Näherung bis auf Glieder vierter Ordnung einfach den Gaußsschen Strahlengang in (76) einzusetzen. Denn die nächste Näherung über den Gaußsschen Strahlengang hinaus würde zu (71), (73) noch Glieder dritter Ordnung in  $\beta_0, \gamma_0$  bzw.  $\beta_1, \gamma_1$  beibringen. Infolge des oben besprochenen Minimalcharakters geht aber eine kleine Änderung von  $r = r(x)$  nur quadratisch in  $W$  ein, somit würde sich bei einer Änderung von  $r$  um Glieder dritter Ordnung  $W$  nur um Glieder sechster Ordnung ändern, die somit für unsere Näherung ohne Bedeutung wären. Aus (71) und (73) ergibt sich

$$(77) \left\{ \begin{aligned} r^2 = z^2 + y^2 = & \varrho_0^2 (\beta_0^2 + \gamma_0^2) \\ & + 2 \varrho_0 \varrho_1 (\beta_0 \beta_1 + \gamma_0 \gamma_1) + \varrho_1^2 (\beta_1^2 + \gamma_1^2), \\ r'^2 = z'^2 + y'^2 = & \varrho_0'^2 (\beta_0'^2 + \gamma_0'^2) \\ & + 2 \varrho_0' \varrho_1' (\beta_0 \beta_1 + \gamma_0 \gamma_1) + \varrho_1'^2 (\beta_1^2 + \gamma_1^2). \end{aligned} \right.$$

Indem wir  $W$  nach Termen verschiedener Größenordnung in den Variablen  $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$  ordnen

$$(78) \quad W = W_0 + W_2 + W_4 + \dots,$$

erhalten wir durch Einsetzen von (77) und (71), (73) in (76)

$$(79) \quad W_0 = \mu_0 s_0 + \int_a^b I_{00}(x) dx - \mu_1 s_1,$$

$$(80) \quad W_2 = \frac{1}{2} A (\beta_0^2 + \gamma_0^2) + B (\beta_0 \beta_1 + \gamma_0 \gamma_1) + \frac{1}{2} C (\beta_1^2 + \gamma_1^2).$$

Die Konstanten  $A, B$  und  $C$  bedeuten hierin folgende Abkürzungen



$$(81) \quad \begin{cases} A = -\mu_0 s_0 + 2\mu_0 \varrho_0(a) + \int_a^b (\varrho_0^2 I_{20} + \varrho_0'^2 I_{02}) dx, \\ B = \mu_0 \varrho_1(a) - \mu_1 \varrho_0(b) + 2 \int_a^b (\varrho_0 \varrho_1 I_{20} + \varrho_0' \varrho_1' I_{02}) dx, \\ C = \mu_1 s_1 - 2\mu_1 \varrho_1(b) + \int_a^b (\varrho_1^2 I_{20} + \varrho_1'^2 I_{02}) dx. \end{cases}$$

In den Ausdruck  $W_4$  mit den Gliedern vierter Ordnung wollen wir vorläufig noch nicht die Gleichung der Bahnkurven (71), (73) einsetzen.  $W_4$  hat die Gestalt

$$(82) \quad \begin{cases} W_4 = \frac{\mu_0 s_0}{8} (\beta_0^2 + \gamma_0^2)^2 \\ + \frac{1}{4} \int_a^b (I_{40} r^4 + \eta I_{22} r^2 r'^2 + I_{04} r'^4) dx - \frac{\mu_1 s_1}{8} (\beta_1^2 + \gamma_1^2)^2. \end{cases}$$

Wir befassen uns zunächst mit der Abbildung durch die Glieder zweiter Ordnung. Diese bildet den Inhalt der elementaren Gauss'schen Dioptrik. Die Integrale in (81) lassen sich noch sehr vereinfachen, wenn wir beachten, daß die Funktionen  $\varrho_0$  und  $\varrho_1$  den Beziehungen

$$(83) \quad I_{20} \varrho_0 = \frac{d}{dx} \left( I_{02} \frac{d\varrho_0}{dx} \right), \quad I_{20} \varrho_1 = \frac{d}{dx} \left( I_{02} \frac{d\varrho_1}{dx} \right)$$

genügen. So ergibt sich aus dem Integrale im Ausdruck für  $B$ , wenn wir darin  $I_{20} \varrho_1$  nach (83) durch  $\frac{d}{dx} \left( I_{02} \frac{d\varrho_1}{dx} \right)$  ersetzen und den hervorgehenden vollständigen Differentialausdruck integrieren

$$(84) \quad \begin{cases} \int_a^b (\varrho_0 \varrho_1 I_{20} + \varrho_0' \varrho_1' I_{02}) dx = \int_a^b [\varrho_0 d(I_{02} \varrho_1') + I_{02} \varrho_1' d\varrho_0] \\ = \int_a^b d(I_{02} \varrho_0 \varrho_1') = I_{02} \varrho_0 \varrho_1' \Big|_a^b. \end{cases}$$

Analog erhalten wir

$$(85) \quad \begin{cases} \int_a^b (\varrho_0^2 I_{20} + \varrho_0'^2 I_{02}) dx = I_{02} \varrho_0 \varrho_0' \Big|_a^b, \\ \int_a^b (\varrho_1^2 I_{20} + \varrho_1'^2 I_{02}) dx = I_{02} \varrho_1 \varrho_1' \Big|_a^b. \end{cases}$$

Mit Benützung der aus (66) leicht herleitbaren Beziehung [vgl. (61)]

$$(86) \quad r_1(b) r_2'(b) - r_1'(b) r_2(b) = \frac{\mu_0}{\mu_1}$$

können wir  $I_{02} \varrho_0 \varrho_1' \Big|_a^b$  noch etwas umformen und erhalten so schließlich für die Größen (81) folgende endgültige Formeln

$$(87) \quad \begin{cases} A = -\mu_0 \left[ s_0 + \frac{r_2'(b)}{r_1'(b)} \right], \\ B = \frac{\mu_0}{r_1'(b)}, \\ C = +\mu_0 \left[ s_0 - \frac{r_1(b)}{r_1'(b)} \right]. \end{cases}$$

Die Abbildungsgleichungen (49) ergeben angewandt auf  $W_2$  (80) die Beziehungen

$$(88) \quad \begin{cases} \mu_0 Y_0 = A \beta_0 + B \beta_1, & \mu_0 Z_0 = A \gamma_0 + B \gamma_1, \\ -\mu_1 Y_1 = C \beta_1 + \beta_0, & -\mu_1 Z_1 = C \gamma_1 + B \gamma_0. \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$(89) \quad \begin{cases} (AC - B^2) \beta_0 = \mu_0 C Y_0 + \mu_1 B Y_1, \\ (AC - B^2) \gamma_0 = \mu_0 C Z_0 + \mu_1 B Z_1. \end{cases}$$

Soll nun der Punkt  $Y_1, Z_1$  ein stigmatisches Bild des Punktes  $Y_0, Z_0$  sein, so muß sich  $Y_1$  als Funktion von  $Y_0$  allein darstellen lassen, d. h. aus den Gl. (89) muß sowohl  $\beta_0$  wie auch  $\gamma_0$  herausfallen. Man erhält also folgende Bedingung für eine stigmatische Abbildung

$$(90) \quad \boxed{\begin{aligned} AC - B^2 &= 0, \\ \frac{Y_1}{Y_0} &= \frac{Z_1}{Z_0} = -\frac{\mu_0 C}{\mu_1 B}. \end{aligned}}$$

Wenn wir für  $A, B$  und  $C$  aus (87) ihre Werte einsetzen, erhalten die Abbildungsgleichungen folgende Gestalt

$$(91) \quad \left[ s_0 + \frac{r_2'(b)}{r_1'(b)} \right] \cdot \left[ s_1 - \frac{r_1(b)}{r_1'(b)} \right] = -\frac{\mu_0}{\mu_1} \frac{1}{r_1'(b)^2},$$

$$(92) \quad \frac{Y_0}{Y_1} = \frac{Z_0}{Z_1} = -\frac{1}{r_1'(b)} \left[ s_1 - \frac{r_1(b)}{r_1'(b)} \right]^{-1}.$$

Die beiden Brennpunktskoordinaten  $x_f = \lim_{s_1 \rightarrow \infty} s_0$  und  $x_f = \lim_{s_0 \rightarrow \infty} s_1$  ergeben sich hieraus zu<sup>1)</sup>

1) Vgl. hierzu die Herleitung dieser Formeln in Ztschr. f. Phys. 88. S. 107. 1933, wo der Begriff des Winkleikonals nicht verwendet wird.

$$(93) \quad x_{f_0} = - \frac{r_0'(b)}{r_1'(b)}, \quad x_{f_1} = + \frac{r_1'(b)}{r_1'(b)}.$$

Die Abstände  $x_0$  und  $x_1$  von den beiden Brennpunkten sind gegeben durch

$$(94) \quad X_0 = s_0 - x_{f_0}, \quad X_1 = s_1 - x_{f_1},$$

führen wir schließlich noch die beiden *Brennweiten*  $f_0$  und  $f_1$  ein

$$(95) \quad f_1 = - \frac{1}{r_1'(b)}, \quad f_0 = \frac{\mu_0}{\mu_1} \frac{1}{r_1'(b)},$$

so können wir die Gl. (91) und (92) in der bekannten Gestalt

$$(96) \quad X_0 X_1 = f_0 f_1, \quad \frac{Y_0}{Y_1} = \frac{Z_0}{Z_1} = \frac{f_1}{X_1} = \frac{X_0}{f_0}$$

schreiben.

Zwischen den beiden Brennweiten  $f_0$  und  $f_1$  besteht nach (95) die Beziehung

$$(97) \quad \frac{\mu_0}{f_0} = - \frac{\mu_1}{f_1} = D.$$

Der gemeinsame Wert  $D$  von  $\frac{\mu_0}{f_0}$  und  $-\frac{\mu_1}{f_1}$  heißt bekanntlich die *Brechkraft* des optischen Systemes und sie ist nach (95) durch die Lösung  $r_1(x)$  von (66) auf folgende Art gegeben:

$$(98) \quad D = \mu_1 r_1'(b).$$

Aus dem Vorhergehenden erkennen wir, daß wir die Gauss'sche Dioptrik vollkommen beherrschen, wenn wir nur die beiden Integrale (69) der Differentialgleichung (66) kennen. Läßt sich die Gl. (66) nicht elementar integrieren, so führt unter allen Umständen folgendes Verfahren zum Ziele. Wir schreiben in (66) für  $I_{02} = m(x)$  und  $I_{20} = \lambda l(x)$  und erhalten als Differentialgleichung der achsennahen Strahlen

$$(99) \quad \frac{d}{dx} \left( m \frac{dr}{dx} \right) = \lambda l(x) \cdot r.$$

$\lambda$  fassen wir als kleinen Entwicklungsparameter auf und setzen die Lösung an in der Form

$$(100) \quad r = r_0 (1 + \lambda \varphi_1 + \lambda^2 \varphi_2 + \lambda^3 \varphi_3 + \dots).$$

Durch Einsetzen in (99), Vergleich gleich hoher Potenzen von  $\lambda$  und eine zweifache Quadratur erhalten wir für die Funktionen  $\varphi_k$  die Rekursionsformel

$$(101) \quad \varphi_k = \int_a^x \frac{dx}{m} \int_a^x l(x) \varphi_{k-1}(x) dx \quad \text{mit} \quad \varphi_0 = 1.$$

Da alle  $\varphi_k$  an der Stelle  $x = a$  mit allen ihren Ableitungen verschwinden, ist

$$(102) \quad r_1(x) = 1 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots$$

die gesuchte Lösung  $r_1$  von (69).<sup>1)</sup> Da  $1/m(x)$  und  $l(x)$  sicher im Intervalle  $< a, b >$  beschränkte Funktionen sind, also die Bedingungen

$$(103) \quad \frac{1}{m} \leq A, \quad l(x) \leq B, \quad \frac{l(x)}{m} \leq AB = C^2$$

erfüllen, folgt aus (101)

$$\varphi_k \leq C^2 \int_a^x dx \int_a^x \varphi_{k-1} dx$$

und durch  $k$ -malige Anwendung dieser Gleichung

$$(104) \quad |\varphi_k| \leq \frac{[C(x-a)]^{2k}}{(2k)!}.$$

Es ist somit

$$(105) \quad \begin{cases} r_1(x) = 1 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots \\ \leq \frac{1}{2} [e^{C(x-a)} + e^{-C(x-a)}] = \coth C(x-a) \end{cases}$$

und die Reihe (102) für  $\varphi_k$  konvergiert mindestens so gut wie die  $E$ -Reihe. Aus der linearen Differentialgleichung

$$(106) \quad r_1 r_2' - r_1' r_2 = \frac{\mu_0}{m(x)}$$

für  $r_2$  finden wir durch eine Quadratur die Lösung  $r_2(x)$  von (66) in der Gestalt

$$(107) \quad r_2(x) = m \mu_0 r_1 \int_a^x \frac{dx}{m r_1^2}.$$

Die beiden Brennpunkte drücken sich daher nach (93) wegen (107) durch die gefundene Lösung  $r_1(x)$ , (102) auf folgende Weise aus

$$(108) \quad \boxed{x_{f_0} = -\frac{\mu_0}{\mu_0} \frac{1}{r_1(b) r_1'(b)}, \quad x_{f_1} = \frac{r_1(b)}{r_1'(b)}}$$

1) Den aus formalen Gründen eingeführten Parameter  $\lambda$  setzen wir wieder gleich Eins, so daß  $l(x) = I_{20}(x)$  bedeutet.

und für die Brechkraft ergibt sich schließlich aus (98) die Entwicklung

$$(109) \quad D = \int_a^b l(x) dx + \int_a^b l dx \int_a^x \frac{dx}{m} \int_a^x l dx + \dots,$$

hieraus kann man nach (97) wieder beide Brennweiten berechnen.

Um die vorhergehenden Entwicklungen, wenigstens die Reduktion des Variationsproblems mit Hilfe des Impulssatzes auf unser Beispiel der optischen Abbildung durch ein rotations-symmetrisches, elektromagnetisches Feld anzuwenden, beachten wir, daß ein derartiges Feld durch seine Potentiale auf folgende Art charakterisiert ist

$$(110) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi = \Phi(r, x); \text{ also } \mu_0(r, x) = \sqrt{(V_0 - \Phi)(V_0 + 2\eta c^2 - \Phi)}, \\ \mathcal{A} \equiv A_r = A_x = 0, \quad A_\varphi = c A(r, x). \end{array} \right.$$

Für  $\mu(r, \hat{s})$  erhält man also nach (31)

$$(111) \quad \mu(r, \hat{s}) = \mu_0 + A r \frac{d\varphi}{ds}, \quad J = \mu_0 \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2} + A r \dot{\varphi}.$$

Die Auflösung des Impulsintegrales

$$(112) \quad J_\varphi = \frac{\mu_0 r^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2}} + A r = C = 0$$

nach  $\dot{\varphi}$  und die Substitution in (111) ergibt

$$(113) \quad I(x, r r') = \sqrt{\mu_0^2 - A^2} \cdot \sqrt{1 + r'^2} = v(r, x) \cdot \sqrt{1 + r'^2}.$$

Die Aufgabe erscheint also zurückgeführt auf den Strahlengang in einem „isotropen Medium“ mit dem Brechungsexponenten

$$(114) \quad v(r, x) = \sqrt{\mu_0^2 - A^2}.$$

Man kann sich ganz allgemein die Frage vorlegen, alle rotations-symmetrischen anisotropen optischen Medien anzugeben, die sich durch Reduktion mit Hilfe des Impulsintegrales auf ein isotropes Medium zurückführen lassen. Die Rechnung ergibt, daß alle optischen Medien mit dieser Eigenschaft einen Brechungsexponenten der Gestalt

$$(115) \quad \mu(x, r, \dot{x}, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \Psi \left[ x, r, \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{r}^2 + \dot{x}^2}} + R \left( \frac{\dot{x}}{\dot{r}} \right) \right] \sqrt{\frac{\dot{r}^2 + \dot{x}^2}{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2}}$$

besitzen müssen. Dabei sind  $\Psi(u, v, w)$  und  $R(t)$  willkürliche Funktionen ihrer Argumente

$$(116) \quad u = x, \quad v = r, \quad w = \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{r}^2 + \dot{x}^2}} + R \left( \frac{\dot{x}}{\dot{r}} \right), \quad t = \frac{\dot{x}}{\dot{r}}.$$

Berechnen wir das Impulsintegral, so ergibt sich wegen

$$J(x, r, \dot{x}, \dot{r}, \dot{\phi}) = \Psi \left[ x, r, \frac{\phi}{\sqrt{\dot{r}^2 + \dot{x}^2}} + R \left( \frac{\dot{x}}{\dot{r}} \right) \right] \sqrt{\dot{r}^2 + \dot{x}^2},$$

$$(117) \quad J_{\dot{\phi}} = \psi_w \left[ x, r, \frac{\phi}{\sqrt{\dot{r}^2 + \dot{x}^2}} + R \left( \frac{\dot{x}}{\dot{r}} \right) \right] = C = 0.$$

Die inverse Funktion von  $\psi_w(w) = y$  wollen wir mit  $w = \bar{\psi}_w(y)$  bezeichnen. Lösen wir (117) nach  $w$  auf

$$(118) \quad w = \frac{\phi}{\sqrt{\dot{r}^2 + \dot{x}^2}} + R \left( \frac{\dot{x}}{\dot{r}} \right) = \bar{\psi}_w(x, r)$$

und führen den erhaltenen Ausdruck in (115) ein, so ergibt sich der isotrope Brechungsexponent aller „reduziblen“ optischen Medien (115) in der Gestalt

$$(114a) \quad \nu(r, x) = \psi[x, r, \bar{\psi}_w(x, r)].$$

Für das elektromagnetische Feld hat z. B. die Funktion  $\psi(w)$  nach (31) die Form

$$(119) \quad \psi(x, r, w) = \mu_0(x, r) \sqrt{1 + r^2 w^2} + A(x, r) r w$$

mit  $R(t) \equiv 0$ .

Wir bemerken noch, daß sich die Koordinaten  $Y_0 Z_0$  und  $Y_1 Z_1$  in (96) auf zwei Koordinatensysteme beziehen, die nach (62) um den Winkel

$$(120) \quad \Psi = \varphi_1 - \varphi_0 = \int_a^b g_{00}(x) dx$$

gegeneinander verdreht sind. Die durch (120) ausgedrückte *Bilddrehung*, die vom abbildenden Strahlengang unabhängig ist und sich nur auf den achsennahen Gauss'schen Strahlengang bezieht, wollen wir *Gauss'sche Bilddrehung* nennen.

#### § 6. Die Seidelschen Koordinaten und das Seidelsche Eikonal

Die Abbildungsgesetze (49) angewandt auf die Glieder zweiter Ordnung  $W_2$  von  $W$  haben die Gauss'sche Dioptrik ergeben. Im folgenden wollen wir unsere Betrachtungen auf die Glieder vierter Ordnung  $W_4$  von  $W$  ausdehnen. Wir werden so zur Theorie der „Fehler dritter Ordnung eines allgemeinen rotationssymmetrischen optischen Systemes“ geführt. Zu diesem Zwecke empfiehlt es sich zu neuen Koordinaten und zu einer neuen Eikonalfunktion überzugehen. Wir wollen Variable einführen, die bei der Bewegung der materiellen Punkte durch das Kraftfeld hindurch, bzw. bei der Lichtbewegung durch das optische System konstant bleiben, wenn

man sich auf den Gauss'schen Strahlengang, also bloß auf die Berücksichtigung der ersten Potenzen in  $r$  und  $r'$  beschränkt. Wir wollen sie mit Schwarzschild<sup>1)</sup> als *Seidelsche Koordinaten* bezeichnen. Hernach wollen wir ihre Änderungen berechnen, die sie erfahren, wenn wir den exakten Strahlenverlauf unseren Betrachtungen zugrunde legen. Man erhält die Seidelschen Koordinaten auf folgende Art: Wir führen sowohl in der Objekt- und Bildebene wie auch in zwei anderen konjugierten Ebenen, der *Ein- und Austrittspupille*, Längeneinheiten  $l_0, l_1$  bzw.  $\lambda_0, \lambda_1$  ein, die durch die *Vergrößerungen* (92) beim Gauss'schen Strahlengang gegeben sind. Sind  $X_0$  und  $X_1$  die Achsenschnittpunkte der Objekt- bzw. Bildebene und  $\bar{X}_0 = X_0 + M_0$  bzw.  $\bar{X}_1 = X_1 + M_1$  diejenigen von Ein- und Austrittspupille, so hat man nach (92)

$$(121) \quad \frac{l_1}{l_0} = \frac{f_0}{X_0}, \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{f_0}{X_0 + M_0},$$

Für die Seidelschen Koordinaten  $y_0, z_0$  bzw.  $y_1, z_1$  in Objekt- und Bildebene schreibt man dann

$$(122) \quad \begin{cases} y_0 = C \frac{Y_0}{l_1}, & y_1 = C \frac{Y_1}{l_1}, \\ z_0 = C \frac{Z_0}{l_0}, & z_1 = C \frac{Z_1}{l_1} \end{cases}$$

und analog in den beiden Pupillenebenen

$$(123) \quad \begin{cases} \eta_0 = \frac{\bar{Y}_0}{\lambda_0}, & \eta_1 = \frac{\bar{Y}_1}{\lambda_1}, \\ \zeta_0 = \frac{\bar{Z}_0}{\lambda_0}, & \zeta_1 = \frac{\bar{Z}_1}{\lambda_1}. \end{cases}$$

Die Konstante  $C$  wollen wir im besonderen wegen der aus (92) leicht herleitbaren Beziehung

$$(124) \quad \frac{\mu_0 l_0 \lambda_0}{M_0} = \frac{n_1 l_1 \lambda_1}{M_1}$$

gleich  $\frac{\mu_0 l_0 \lambda_0}{M_0}$  wählen. Da im Gauss'schen Falle  $Y_0, Z_0$  und  $Y_1, Z_1$  mit den Größen  $\bar{Y}_0, \bar{Z}_0$  und  $\bar{Y}_1, \bar{Z}_1$  durch die Gleichungen

$$(125) \quad \begin{cases} \frac{\bar{Y}_0 - Y_0}{M_0} = \beta_0, & \frac{\bar{Y}_1 - Y_1}{M_1} = \beta_1, \\ \frac{\bar{Z}_0 - Z_0}{M_0} = \gamma_0, & \frac{\bar{Z}_1 - Z_1}{M_1} = \gamma_1 \end{cases}$$

1) S. Schwarzschild, Abhandl. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math. Phys. Kl. IV. Nr. 1. 1905; vgl. auch M. Born, Optik. S. 68—103. Berlin 1933.



zusammenhängen, erhalten wir für das System der vier Seidelschen Koordinaten die endgültigen Definitionsgleichungen

$$(126) \quad \left\{ \begin{array}{ll} y_0 = \frac{Y_0}{l_0} \frac{\mu_0 \lambda_0 l_0}{M_0}, & z_0 = \frac{Z_0}{l_0} \frac{\mu_0 \lambda_0 l_0}{M_0}, \\ \eta_0 = \frac{\bar{Y}_0}{\lambda_0} = \frac{Y_0}{\lambda_0} + \frac{M_0}{\lambda_0} \beta_0, & \zeta_0 = \frac{\bar{Z}_0}{\lambda_0} = \frac{Z_0}{\lambda_0} + \frac{M_0}{\lambda_0} \gamma_0, \\ y_1 = \frac{Y_1}{l_1} \frac{\mu_0 \lambda_0 l_0}{M_0}, & z_1 = \frac{Z_1}{l_1} \frac{\mu_0 \lambda_0 l_0}{M_0}, \\ \eta_1 = \frac{\bar{Y}_1}{\lambda_1} = \frac{Y_1}{\lambda_1} + \frac{M_1}{\lambda_1} \beta_1, & \zeta_1 = \frac{\bar{Z}_1}{\lambda_1} = \frac{Z_1}{\lambda_1} + \frac{M_1}{\lambda_1} \gamma_1. \end{array} \right.$$

Die Auflösung nach den alten Variablen mit Rücksicht auf (124) ergibt

$$(127) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \beta_0 = \frac{\lambda_0}{M_0} \eta_0 - \frac{y_1}{\mu_0 \lambda_0} y_0, & \gamma_0 = \frac{\lambda_0}{M_0} \zeta_0 - \frac{1}{\mu_0 \lambda_0} z_0, \\ Y_0 = \frac{M_0}{\mu_0 \lambda_0} y_0, & Z_0 = \frac{M_0}{\mu_0 \lambda_0} z_0, \\ \beta_1 = \frac{\lambda_0}{M_0} \eta_1 - \frac{1}{\mu_1 \lambda_1} y_1, & \gamma_1 = \frac{\lambda_1}{M_1} \zeta_1 - \frac{1}{\mu_1 \lambda_1} z_1, \\ Y_1 = \frac{M_1}{\mu_1 \lambda_1} y_1, & Z_1 = \frac{M_1}{\mu_1 \lambda_1} z_1. \end{array} \right.$$

Führt man diese Größen in die mit (49) äquivalente Gleichung

$$(128) \quad \delta W = -\mu_1 (Y_1 \delta \beta_1 + Z_1 \delta \gamma_1) + \mu_0 (Y_0 \delta \beta_0 + Z_0 \delta \gamma_0)$$

ein, so erhält man

$$(129) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta W = y_0 \left( \delta \eta_0 - \frac{M_0}{\mu_0} \frac{\delta y_0}{\lambda_0^2} \right) + z_0 \left( \delta \zeta_0 - \frac{M_0}{\mu_0} \frac{\delta z_0}{\lambda_0^2} \right) \\ \quad - y_1 \left( \delta \eta_1 = \frac{M_1}{\mu_1} \frac{\delta y_1}{\lambda_1^2} \right) = z_1 \left( \delta \zeta_1 - \frac{M_1}{\mu_1} \frac{\delta z_1}{\lambda_1^2} \right). \end{array} \right.$$

Da die Terme rechts zum Teil vollständige Differentiale sind, wird man veranlaßt an Stelle von  $W$  folgenden Ausdruck zu bilden

$$(130) \quad \left\{ \begin{array}{l} S = W + \frac{M_0}{\mu_0} \frac{y_0^2 + z_0^2}{2 \lambda_0^2} - \frac{M_1}{\mu_1} \frac{y_1^2 + z_1^2}{2 \lambda_1^2} \\ \quad + y_0 (\eta_1 - \eta_0) + z_0 (\zeta_1 - \zeta_0). \end{array} \right.$$

Die Variation von  $S$  mit Rücksicht auf (128) ergibt

$$(131) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta S = \delta y_0 (\eta_1 - \eta_0) + \delta z_0 (\zeta_1 - \zeta_0) \\ \quad + \delta y_1 (y_0 - y_1) + \delta \zeta_1 (z_0 - z_1) \end{array} \right.$$

oder in anderer Gestalt

$$(132) \quad \begin{cases} \eta_1 - \eta_0 = + \frac{\partial S}{\partial y_0}, & y_1 - y_0 = - \frac{\partial S}{\partial \eta_1}, \\ \zeta_1 - \zeta_0 = + \frac{\partial S}{\partial z_0}, & z_1 - z_0 = - \frac{\partial S}{\partial \zeta_1}. \end{cases}$$

Die Funktion  $S$  der vier Variablen  $y_0, z_0, \eta_1, \zeta_1$ , das *Seidelsche Eikonal* unseres optischen Systemes hat also die fundamentale Eigenschaft, daß ihre Differentialquotienten unmittelbar die Verschiebungen der Schnittpunktskoordinaten des Strahles, gegen die aus der Gauss'schen Dioptrik folgenden Werte ( $\eta_1 = \eta_0, \zeta_1 = \zeta_0, y_1 = y_0, z_1 = z_0$ ) angeben.

Geht man nun vom Winkeleikonal (78) zum Seidelschen Eikonal über, so kann dessen Entwicklung keine Glieder zweiter Ordnung enthalten, weil bei Beschränkung auf Glieder zweiter Ordnung in den Gleichungen (132) nach Gauss  $y_1 = y_0, z_1 = z_0$  usw. ist und somit  $S = 0$  folgt. Es gilt also folgende Entwicklung

$$(133) \quad S = S_4 + S_6 + \dots$$

Bei Berücksichtigung von  $S_4$  allein ergibt sich wieder die „Theorie der Fehler dritter Ordnung“, nimmt man auch  $S_6$  hinzu, erhält man die Theorie der „Fehler fünfter Ordnung“ usw.

#### § 7. Die Bildfehler dritter Ordnung und das Petzvalsche Theorem

Da die Gleichungen, welche den Übergang von  $\beta_0, \gamma_0, \beta_1, \gamma_1$  zu den Seidelschen Koordinaten darstellen, linear sind, kann sich die Ordnung der einzelnen Terme nicht ändern und es wird aus

$$(134) \quad \begin{cases} W_4 = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{8} (\beta_0^2 + \gamma_0^2)^2 + \frac{1}{4} \int_a^b (I_{40} (y^2 + z^2)^2 \\ + 2 I_{22} (y'^2 + z'^2) (y^2 + z^2) + I_{04} (y'^2 + z'^2)^2) dx \\ - \frac{\mu_1 \varepsilon_1}{8} \beta_1^2 + \gamma_1^2 \end{cases}$$

$S_4$  hervorgehen. Um  $S_4$  zu berechnen haben wir in (134) nur für  $y, z$  und  $y', z'$  ihre Gleichungen als Funktionen der Seidelschen Koordinaten  $y_0, z_0, \eta_1, \zeta_1$  einzusetzen. Es sei

$$(135) \quad y = c_1 r_1(x) + c_2 r_2(x)$$

die Gleichung des gesuchten Strahles. Diese haben wir nun durch die Seidelschen Koordinaten in Objektebene und Austrittspupille auszudrücken. Da  $y'(a)$  einerseits wegen der für  $r_1$  und  $r_2$  gültigen Anfangsbedingungen gleich  $c_2$  ist, anderer-

seits aber auch durch  $\beta_0 = \frac{\bar{Y}_0 - Y_0}{s_0 - t_0}$  gegeben ist, finden wir zunächst

$$(136) \quad c_2 = \frac{\bar{Y}_0 - Y_0}{s_0 - t_0}.$$

Da ferner der gesuchte Strahl durch den Objektpunkt  $Y_0$  geht, welcher die Abzisse  $-s_0$  besitzt, gilt

$$Y_0 - y(a) = -y'(a) \cdot s_0,$$

woraus sich wegen  $y(a) = c_1$

$$(137) \quad c_1 = Y_0 + c_2 s_0$$

Nun ist nach (123)

$$(138) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta_1 = \frac{\bar{Y}_1}{\lambda_1}, \quad \frac{\bar{Y}_1}{\bar{Y}_0} = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \text{ 1), also } \bar{Y}_0 = \eta_1, \quad Y_0 = \frac{s_0 - t_0}{\mu_0} y_0, \\ \zeta_1 = \frac{\bar{Z}_1}{\lambda_1}, \quad \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_0} = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}, \quad \text{also } \bar{Z}_0 = \zeta_1, \quad Z_0 = \frac{s_0 - t_0}{\mu_0} z_0. \end{array} \right.$$

Die beiden Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  drücken sich somit nach (136) und (137) durch die beiden Seidelschen Koordinaten  $y_0$  und  $\eta_1$  auf folgende Weise aus:

$$(139) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_2 = \frac{1}{s_0 - t_0} \eta_1 - \frac{1}{\mu_0} y_0 \\ c_1 = \frac{s_0}{s_0 - t_0} \eta_1 - \frac{t_0}{\mu_0} y_0 \end{array} \right.$$

und für die Gleichung des Strahles  $y = y(x)$  erhält man

$$(140) \quad y = \frac{s_0 r_1(x) + r_2(x)}{s_0 - t_0} \eta_1 - \frac{t_0 r_1(x) + r_2(x)}{\mu_0} y_0.$$

Führen wir für das folgende die beiden wichtigen Funktionen

$$(141) \quad h(x) = \frac{1}{s_0 - t_0} (s_0 r_1 + r_2), \quad H(x) = \frac{1}{\mu_0} (t_0 r_1 + r_2)$$

ein, so können wir die Gleichung des Strahles, der durch seine Seidelschen Koordinaten festgelegt ist, in folgender Form schreiben:

$$(142) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = h(x) \eta_1 - H(x) y_0, \\ z = h(x) \zeta_1 - H(x) z_0, \end{array} \right.$$

wobei sich die Gleichung für  $z$  ganz analog wie diejenige für  $y$  ergibt. Aus (142) finden wir:

$$(143) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = h'_0 \eta_1 - H'_0 y_0, \quad \gamma_0 = h'_0 \zeta_1 - H'_0 z_0, \quad h'_0 = \left( \frac{dh}{dx} \right)_{x=a} \text{ usw.} \\ \beta_1 = h'_1 \eta_1 - H'_1 y_0, \quad \gamma_1 = h'_1 \zeta_1 - H'_1 z_0. \end{array} \right.$$

1) Wir setzen die willkürliche Größe  $\lambda_0 = 1$ .

Setzt man zur Abkürzung:

$$(144) \quad R = y_0^2 + z_0^2, \quad k = y_0 \eta_1 + z_0 \zeta_1, \quad \varrho = \eta_1^2 + \zeta_1^2,$$

so folgt aus (142) und (143):

$$(145) \quad \begin{cases} \beta_0^2 + \gamma_0^2 = H_0'^2 R - 2 h_0' H_0' k + h_0'^2 \varrho, \\ \beta_1^2 + \gamma_1^2 = H_1'^2 R - 2 h_1' H_1' k + h_1'^2 \varrho, \\ x^2 + y^2 = H^2 R - 2 H h k + h^2 \varrho, \\ x'^2 + y'^2 = H'^2 R - 2 H' h' k + h'^2 \varrho. \end{cases}$$

Wenn wir diese Größen in den Ausdruck (134) für  $W_4$  einführen, erhalten wir schließlich das gesuchte Seidelsche Eikonal  $S_4$  in der Gestalt

$$(146) \quad S_4 = -\frac{A}{4} R^2 - \frac{B}{4} \varrho^2 - C k^2 - \frac{D}{2} R \varrho + E \cdot R k + F \cdot \varrho k,$$

wobei die Koeffizienten  $A, B, C, D, E, F$  durch folgende Ausdrücke gegeben sind:

$$(147) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{\mu_1 s_1}{2} H_1'^4 - \int_a^b (H^4 I_{40} + 2 H^2 H'^2 I_{22} \\ &\quad + H'^2 I_{04}) dx - \frac{\mu_0 s_0}{2} H_0'^4, \\ B &= \frac{\mu_1 s_1}{2} h_1'^4 - \int_a^b (h^4 I_{40} + 2 h^2 h'^2 I_{22} \\ &\quad + h'^2 I_{04}) dx - \frac{\mu_0 s_0}{2} h_0'^4, \\ C &= \frac{\mu_1 s_1}{2} h_1'^2 H_1'^2 - \int_a^b (h^2 H^2 I_{40} + 2 h H h' H' I_{22} \\ &\quad + h'^2 H'^2 I_{04}) dx - \frac{\mu_0 s_0}{2} h_0'^2 H_0'^2, \\ D &= \frac{\mu_1 s_1}{2} h_1'^2 H_1'^2 - \int_a^b (h^2 H^2 I_{40} + (h^2 H'^2 + h'^2 H^2) I_{22} \\ &\quad + h'^2 H'^2 I_{04}) dx - \frac{\mu_0 s_0}{2} h_0'^2 H_0'^2, \\ E &= \frac{\mu_1 s_1}{2} H_1'^3 h_1' - \int_a^b (H^3 h I_{40} + (H^2 H^2 h + H H' h') I_{22} \\ &\quad + H'^3 h' I_{04}) dx - \frac{\mu_0 s_0}{2} H_0'^3 h_0', \\ F &= \frac{\mu_1 s_1}{2} H_1' h_1'^3 - \int_a^b (H h^3 I_{40} + (h^2 H' h' + h'^2 H h) I_{22} \\ &\quad + H' h'^3 I_{04}) dx - \frac{\mu_0 s_0}{2} H_0' h_0'^3. \end{aligned} \right.$$

Die fünf Größen bestimmen bekanntlich die *Bildfehler dritter Ordnung* des optischen Systems. Sie sind das Analogon zu den *Seidelschen Formeln* für die Bildfehler eines *zentrierten Linsensystems* und beziehen sich auf ein allgemeines inhomogenes anisotropes Medium. Über die Diskussion dieser Größen müssen wir auf die entsprechenden optischen Lehrbücher<sup>1)</sup> verweisen. *B* bestimmt bekanntlich die *sphärische Aberration*. *F* gibt das „*Komma*“. *E* die *Verzeichnung* und *C* und *D* bestimmen *Bildwölbung* und *Astigmatismus*. Weiter müssen wir aber noch berücksichtigen, daß durch die Strahldrehung (62) gleichfalls eine Verrückung des Bildpunktes gegenüber dem *Gauss'schen Bildpunkt* verursacht wird. Setzen wir aus (145) in die Formel (62) ein, so ergibt sich für den Unterschied zwischen *Gauss'scher Drehung* und tatsächlicher Bild-drehung der Ausdruck

$$(148) \quad \Delta \varphi = \varphi - \Phi = MR - 2Nk + L\varphi,$$

in dem die Größen *M*, *N* und *L* folgende Konstante bedeuten:

$$(149) \quad \begin{cases} M = \frac{1}{2} \int_a^b (H^2 g_{20} + H'^2 g_{02}) dx, \\ N = \frac{1}{2} \int_a^b (h H g_{20} + h' H' g_{02}) dx, \\ L = \frac{1}{2} \int_a^b (h^2 g_{20} + h'^2 g_{02}) dx. \end{cases}$$

Da sich die tatsächliche durch (148) bedingte Bildverrückung aus (148) durch Multiplikation mit *r* (145) ergibt, ist die Größe dieses Bildfehlers der „*Bildzerrückung*“ ebenfalls von dritter Ordnung.

Aus den Formeln (147) können wir nun unmittelbar auch das berühmte *Petzval'sche Theorem* der geometrischen Optik für die Abbildung durch allgemeine Medien herleiten. Man findet für die „*Petzvalkrümmung*“

$$(150) \quad \frac{1}{q_1} - \frac{3}{q_2} = 4(C - D).$$

Aus (147) erhält man zunächst folgenden Ausdruck:

$$(151) \quad C - D = \int_a^b (h H' - h' H)^2 I_{22} dx.$$

1) H. Born, a. a. O., S. 92–96; S. Schwarzschild, a. a. O.

Setzen wir aus (141) ein, so ergibt sich:

$$(hH' - h'H) = \frac{1}{\mu_0(s_0 - t_0)} \left| \begin{matrix} s_0 r_1 + r_2, & s_0 r_1' + r_2' \\ t_0 r_1 + r_2, & t_0 r_1' + r_2' \end{matrix} \right| = \frac{1}{\mu_0} \left| \begin{matrix} r_1 r_1', \\ r_2 r_2' \end{matrix} \right|.$$

Wegen (86) kann man hierfür schreiben:

$$(152) \quad (hH' - h'H) = \frac{1}{m(x)}.$$

Indem man diesen Ausdruck in (151) einführt, ergibt sich schließlich:

$$(153) \quad \frac{1}{\varrho_1} - \frac{3}{\varrho_2} = 4 \int_a^b \frac{I_{22} dx}{m^2(x)}.$$

Und die Petzvalbedingung erhält nach (59) die Gestalt

$$(154) \quad \int_a^b \frac{\partial^4 I}{\partial r^2 \partial r'^2} \left( \frac{\partial^2 I}{\partial r'^2} \right)^{-2} = 0.$$

Außer dem elektromagnetischen Feld bildet auch ein axialsymmetrisches *rotierendes* isotropes Medium ein Beispiel für ein rotationssymmetrisches anisotropes Problem.<sup>1)</sup> Man hätte nur, um den Brechungsexponenten der rotierenden Linse zu bestimmen, in jedem ihrer Punkte die tatsächliche Lichtgeschwindigkeit aus derjenigen in der ruhenden Linse und aus der durch die Rotation gegebenen Geschwindigkeit nach dem Einsteinschen Additionstheorem zusammenzusetzen und den reziproken Wert als Brechungsexponenten in die Rechnung einzuführen. Beschränkt man sich auf „Effekte erster Ordnung“, so genügt es, den Strahlengang im rotierenden Medium so aufzufassen, als würde der Strahl entsprechend dem *Fresnelschen Mitführungskoeffizienten* von der rotierenden Linse mitgeführt werden.

1) Anisotrope Medien als bewegte isotrope Medien hat Ph. Frank (a. a. O.) allgemein untersucht und eine hierauf beruhende Herleitung des *Fresnelschen Mitführungskoeffizienten* gegeben.

Prag, Institut für theoretische Physik der Deutschen Universität.

(Eingegangen 8. September 1933)

## **Die Eichung von Hochspannungsmessern mit Hilfe von Kathodenstrahlen**

**Von K. H. Stehberger**

(Mit 3 Figuren)

### I. Aufgabe und Wesen der Methode

Die weitaus meisten Hochspannungselektrometer bedürfen einer Eichung mit bekannten Spannungen. Eine solche Eichung ist im allgemeinen noch immer mit erheblichen Schwierigkeiten verknüpft, wenn sie einigermaßen genau und zuverlässig sein soll. Die absolute Spannungswaage vermag dies nur in einer sehr kostspieligen Ausführung zu leisten, und wo eine solche nicht zur Verfügung steht, muß man sich recht umständlicher Verfahren bedienen, die bei einer bekannten niedrigen Spannung ihren Ausgang nehmen. Das Ergebnis ruht dann auf einer Kette verschiedenartiger Messungen und ist infolgedessen meist mit großer Unsicherheit behaftet. Der *Kathodenstrahlhochspannungsmesser* erscheint diesen Verfahren bei einfacher Handhabung an Übersichtlichkeit des Meßvorgangs und damit an Zuverlässigkeit überlegen. Er ist im strengen Sinn kein absolutes Instrument. Denn einige der Messung zugrundeliegende Größen, wie etwa die spezifische Ladung des Elektrons oder ein zur Messung erforderlicher geeichter Widerstand, beruhen auf einer Spannungsmessung. Doch liegen deren Ergebnisse in der Kenntnis von  $e/m$  bez. in einem Normalwiderstand bereits in sorgfältigster Ausführung vor. Außer diesen Größen gehen nur noch zwei gut bestimmbare und konstante Längengrößen der Apparatur in die Hochspannungsmessung ein.

### II. Meßprinzip

Zwischen der Potentialdifferenz  $V$  und der Geschwindigkeit  $v$  eines Kathodenstrahls, der mit der Anfangsgeschwindigkeit Null diese Potentialdifferenz durchlaufen hat, besteht die bekannte Beziehung

$$(1) \quad V = \frac{m_0}{e} \cdot \frac{v^2}{2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$



Sie gestattet eine Spannungsmessung durch eine Geschwindigkeitsmessung an einem Kathodenstrahl zu ersetzen. Hiervon ist bei der vorliegenden Methode Gebrauch gemacht. Zur Geschwindigkeitsmessung dient ein System gekreuzter Felder, wie es von Bestelmeyer<sup>1)</sup> bei seiner  $e/m$ -Bestimmung zuerst verwendet wurde. Ein enger Plattenkondensator, der im Mittelpunkt einer stromdurchflossenen Spule derart angeordnet ist, daß magnetisches und elektrisches Feld senkrecht aufeinander stehen, wirkt auf einen senkrecht zur Ebene beider Felder in den Kondensator eintretenden Kathodenstrahl als „Monochromator“. Nur diejenigen Elektronen, deren Geschwindigkeit  $v$  nahe gleich dem Quotienten aus den beiden Feldstärken  $\mathfrak{H}/\mathfrak{E}$  ist, können den schmalen Kondensatorspalt unabgelenkt durchqueren. Man kann einem solchen System ein Auflösungsvermögen gegenüber Kathodenstrahlen mit verschiedenen Geschwindigkeiten zuschreiben, das durch den Ausdruck  $v/\delta v$  zu definieren ist.<sup>2)</sup> Hierin bedeutet  $\delta v$  den kleinsten Geschwindigkeitsunterschied zweier Elektronenstrahlen, der in der weiter unten näher zu beschreibenden Anordnung gerade noch beobachtet werden kann. Dies ist, wie gezeigt werden wird, dann der Fall, wenn einer der Strahlen nicht mehr zu jedem Punkt des Endquerschnitts des Kondensatorraumes gelangen kann, wenn nämlich sein Krümmungsradius  $r$  kleiner ist als  $r_0$ . Die Größe  $r_0$  hängt von der Länge  $l$  und der Dicke  $d$  des Kondensatorraumes ab (Fig. 1).

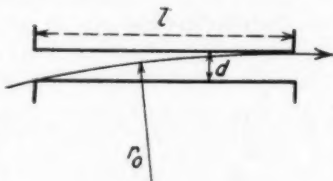


Fig. 1

$$r_0 = \frac{l^2}{2d} \quad (\text{für } d \ll l).$$

Das Auflösungsvermögen  $A$  der Anordnung unter diesen Bedingungen läßt sich folgendermaßen berechnen:

Der Radius  $r_v$  eines Kathodenstrahls der Geschwindigkeit  $v$  in dem Feldsystem  $(\mathfrak{E}, \mathfrak{H})$  ist durch die Gleichung gegeben:

$$r_v = \frac{m}{e} \frac{v^3}{\mathfrak{H} v - \mathfrak{E}}.$$

1) A. Bestelmeyer, Ann. d. Phys. 22. S. 429. 1907.

2) Diese Definition verwendet für einen ähnlichen Fall bereits F. Kirchner, Ann. d. Phys. [5] 8. S. 979. 1931.

Für einen Kathodenstrahl der Geschwindigkeit  $v + \Delta v$  lautet dieselbe Beziehung

$$r_{v+\Delta v} = \frac{m}{e} \frac{v^2 + (\Delta v)^2 + 2v\Delta v}{\Phi(v + \Delta v) - \Phi}$$

Setzt man hierin  $v = \frac{\Phi}{\Phi'}$ , und vernachlässigt man  $(\Delta v)^2$ , so erhält man

$$\Delta v = \frac{1}{r_{v+\Delta v} \cdot \frac{e}{m} \frac{\Phi^2}{\Phi'^2} - 2 \frac{\Phi}{\Phi'}}$$

Nach Einsetzen von  $r_0$  für  $r_{v+\Delta v}$  zeigt der Ausdruck den kleinsten, noch beobachtbaren Geschwindigkeitsunterschied  $\delta v/2$  eines Kathodenstrahls gegenüber dem eingestellten  $v$ -Wert an.

$$\frac{\delta v}{2} = \frac{1}{\frac{e}{m} \frac{l^2}{2d} \frac{\Phi^2}{\Phi'^2} - 2 \frac{\Phi}{\Phi'}}$$

Das Auflösungsvermögen  $A$  ist dann

$$A = \frac{v}{\delta v} = \frac{e}{m} \frac{l^2}{4d} \frac{\Phi^2}{\Phi'} - 1.$$

$\delta v/2v$  bedeutet den größten *Einstellungsfehler* des Meßsystems. Zur Ermittlung des *gesamten* Fehlers, mit dem die  $v$ -Messung behaftet ist, sind außerdem noch die meist kleineren Fehler, die bei den eingehenden Längen- und Widerstandsmessungen auftreten, zu berücksichtigen.

### III. Apparatur

Die Apparatur, die auf Grund des erläuterten Meßprinzips Kathodenstrahlgeschwindigkeiten zu messen gestattet, ist in Fig. 2 schematisch dargestellt. Sie setzt sich zusammen aus einer Kathodenstrahlröhre, die eine Elektronenquelle, den Meßkondensator und einen Leuchtschirm enthält, sowie aus der Magnetfeldspule, einem veränderlichen geeichten Widerstand und einigen gebräuchlichen Schaltelementen. Die im folgenden beschriebene Anordnung ist einer Hochspannung von 10 bis 60 kV entsprechend dimensioniert. Die Länge der Röhre beträgt 40 cm. Der Glühfaden der Kathode  $K$  ist in eine zylindrische Kapsel eingeschlossen. Der Austrittsblende für die Elektronen gegenüber befindet sich in der Rückwand der Kapsel eine etwas größere Öffnung. Der Faden ist in einer Schleife außerhalb der Zylinderachse geführt. Durch diese Anordnung wird eine störende Beleuchtung des Schirmes  $S$  vermieden. Zur Heizung der Kathode, die nur eine geringe

Leistung aufnimmt, dient eine isoliert aufgestellte Batterie. Zeitweise wurde auch ein kleiner Heiztransformator benutzt. Der Abstand zwischen der Kathode und der Anodenscheibe *A* wurde nicht größer als 12 mm gemacht, um die Strecke, längs welcher die Elektronen der einseitigen Wirkung des unkompenzierten Magnetfeldes unterliegen, möglichst kurz zu halten. Die Anodenscheibe, im zylindrischen Ansatz *B* der Röhre durch Federn fixiert, trägt den Meßkondensator *M*.

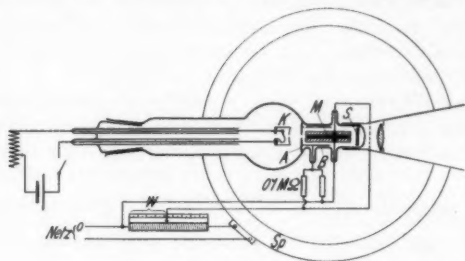


Fig. 2

Dieser besteht aus zwei Spiegelglasplatten mit den Ausmaßen  $70 \times 20 \times 4$  mm, die mit einer Platinschicht belegt sind. Ein konstanter und sicher bekannter Plattenabstand wird durch vier Distanzplättchen aus Quarzglas gewährleistet. Der Leuchtschirm *S* ist ein rundes, mit Calciumwolframat belegtes Glas-scheibchen. Die Feldspule *Sp* besteht aus zwei ringförmigen Einzelspulen zu je 500 Windungen, die konzentrisch im Abstand ihres Radius ( $R = 15,4$  cm) angeordnet sind. Durch Rechnung und Messung wurde die magnetische Feldstärke im Mittelpunkt dieses Systems, wenn es von der Stromeinheit durchflossen wird, genau bestimmt ( $\mathfrak{H}_0 = 293,0$  CGS).

Zur Einstellung eines bekannten  $\mathfrak{F}/\mathfrak{H}$  im Kondensatorinnern wird folgendermaßen verfahren: Der Spulenstrom durchfließt einen genau durchgezeichneten veränderlichen Widerstand. Von diesem wird mittels eines Schleifkontakts eine Kondensatorspannung *E* abgegriffen, deren Verhältnis zum Spulenstrom *J* sich aus dem abgegriffenen Teil *W* des Widerstands ergibt. So besteht zwischen der Geschwindigkeit eines Kathodenstrahls, der den Kondensator unabgelenkt durchquert und den Schirm zum Aufleuchten bringt, und *W* in CGS-Einheiten die Gleichung:

$$(2) \quad v = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{H}} = \frac{1}{d \cdot \mathfrak{H}_0} \cdot \frac{E}{J} = C \cdot W.$$

Bei der bisher verwendeten Apparatur ergab sich beispielsweise aus dem Plattenabstand  $d = 0,0212$  cm und  $\xi_0 = 293,0$  eine Apparatkonstante  $C = 0,1609$ . Wird  $W$  in Ohm eingesetzt, tritt zu  $C$  noch der Faktor  $10^9$  hinzu, damit  $v$  in cm/sec erscheint.

Anstatt den veränderlichen Widerstand genau durchzueichen, können natürlich auch  $E$  und  $J$  durch zuverlässige Instrumente gemessen werden.

Zur Hochspannungsmessung wird der Schleifkontakt des Widerstands so lange verschoben, bis der Leuchtfleck auf dem Schirm erkennen läßt, daß vollständige Kompensation der ablenkenden Kräfte im Kondensatorinnern erzielt ist. Aus dem eingestellten  $W$  ergibt sich nach Gl. (2) die vorhandene Kathodenstrahlgeschwindigkeit  $v$ , und die gesuchte Spannung kann dann sofort einem gemäß Gl. (1) angefertigten Kurvenbild entnommen werden.

#### IV. Messung mittels stationärer und Wechselfelder

Da in das Meßergebnis nur das *Verhältnis* des elektrischen und magnetischen Feldes eingeht, während die absoluten Feldstärken nur auf das Auflösungsvermögen der Apparatur Einfluß besitzen, ist es auch möglich, zur Erzeugung der gekreuzten Felder eine Wechselstromquelle zu benutzen. Sowohl das stationäre, als auch das Wechselfeldsystem bieten Vorteile, so daß die Eigenschaften beider Verfahren hier erwähnt werden mögen.

Ist die genaue Eichung eines Elektrometers beabsichtigt, wird das *stationäre Feldsystem* vorzuziehen sein. Es erlaubt

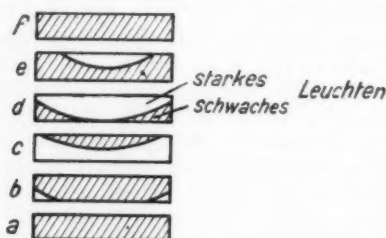


Fig. 3

vor allem eine schärfere Einstellung des Kompensationszustandes. Beim langsamen Verschieben des Schleifkontaktes von kleinen zu großen  $W$  beobachtet man auf dem Leuchtschirm die in Fig. 3 angedeuteten Vorgänge. Bei grober An-

näherung an das gesuchte  $\mathfrak{F}/\mathfrak{H}$  erscheint zunächst ein schwacher Leuchtfleck (a) von der Gestalt des Kondensatorspaltes, herrührend von solchen Elektronen, die nach Reflexionen an den Kondensatorplatten doch noch den Weg zum Leuchtschirm gefunden haben. Bei weiterer Annäherung an die Kompensation erscheint zunächst an den Enden dieses Spaltbildes ein intensives Leuchten (b), das dann zur Mitte zusammenwächst, und schließlich dort zuletzt verschwindet (c). Dieses Leuchten ist die Wirkung der direkten Strahlen, und seine gekrümmte Form kommt daher, daß für die parallel zur Röhrenachse den Kondensator durchfliegenden Elektronen, die in der Mitte des Spaltbildes erscheinen, der gesamte Betrag der magnetischen Feldstärke wirksam ist, während bei den anderen, die an den Enden des Spaltbildes auftreten, nur eine Komponente von  $\mathfrak{H}$  zur Kompensation des gleichen  $\mathfrak{F}$  beiträgt. Die gesuchte Einstellung von  $W$  ist erreicht, wenn die mittleren Strahlen keine Ablenkung erfahren (d). Der beschriebene Ablauf der Leuchtbilder auf dem Schirm bietet eine Gewähr für die richtige Justierung der Röhre zur Feldspule und erleichtert beträchtlich eine genaue Einstellung von  $W$ .<sup>1)</sup>

Beim Anschluß der Anordnung an ein Gleichstromnetz ist das Potential der Anode, das durch die in Fig. 2 eingezeichneten Widerstände auf der Höhe

$$\frac{p_1 + p_2}{2} \quad (p_1 \text{ und } p_2 \text{ Kondensatorpotentiale})$$

gehalten wird, festgelegt. Sein geringer Unterschied gegen Erde ist bei feinen Messungen zu berücksichtigen. Ferner ist eine etwa vorhandene störende magnetische Erdfeldkomponente durch Umpolung zu eliminieren.

Bei Anwendung von *Wechselfeldern* eliminiert sich diese Fehlerquelle von selbst. Ein weiterer Vorteil dieses Verfahrens kann in der Möglichkeit erblickt werden, zwischen Netz und Apparatur einen hochspannungsisolierten Transformator zwischenzuschalten, wodurch die Apparatur frei von einer Erdverbindung bleiben kann. Außerdem ist die Kondensatorspannung nicht durch die zur Verfügung stehende Netzspannung begrenzt. Schließlich erscheint es möglich, durch Einschaltung eines Meßwandlers zwischen Spulenstromkreis und Kondensator die im Meßwiderstand nutzlos verbrauchte

1) Wiederholte Einstellungen zeigten untereinander Abweichungen, die stets innerhalb der durch den oben berechneten Einstellungsfehler (bei der vorliegenden Anordnung im Mittel  $\pm 1\%$ ) gegebenen Genauigkeitsgrenze blieben.

Stromleistung bedeutend herabzusetzen. Die Einstellung der Kompensation muß bei der Anwendung von Wechselfeldern allein nach dem *Helligkeitsmaximum* des Leuchtfleckes, wobei nur dessen mittlerer Teil in Betracht kommt, erfolgen. Erwähnt sei noch, daß in diesem Falle bei Veränderung von  $W$  der Leuchtfleck niemals vollständig verschwindet, da das Auflösungsvermögen der Apparatur während einer Periode der Wechselfeldspannung zweimal Null wird. Der Meßwiderstand muß möglichst selbstinduktionsfrei sein.

#### V. Verhalten gegenüber oszillierenden Hochspannungen

Die gebräuchlichen Hochspannungsanlagen, bestehend aus Hochspannungstransformator und einer Gleichrichteranordnung, liefern eine mehr oder weniger „wellige“ Gleichspannung. Der Kathodenstrahlhochspannungsmesser vermag im Gegensatz zu den statischen Elektrometern beide Extremwerte und damit die Welligkeit der Spannung zur Messung zu bringen. Näheres kann jedoch noch nicht gesagt werden, da Versuche hierüber sowie über eine direkt anzeigende Form der Anordnung noch im Gange sind.

Berlin, Seminar für Physik der Landwirtschaftlichen Hochschule.

(Eingegangen 12. September 1933)